Anhang A

Steuerung eines Freistrahls

In diesem Anhang soll ein Versuch beschrieben werden, mit dessen Hilfe die wesentlichen Effekte zur Steuerung komplexer Systeme veranschaulicht werden können. Im wesentlichen soll dieser Abschnitt als ein Beitrag zur Didaktik in der Physik verstanden werden. Es wurde deshalb darauf geachtet, den Versuch verständlich zu beschreiben und einen Aufbau zu verwenden, der mit einfachen Mitteln nachgebaut werden kann.

Ein tropfender Wasserhahn ist eines der aus dem Alltag bekannten Beispiele für einen Übergang von periodischer zu chaotischer Dynamik [CFPS86]: Ist der Hahn fast geschlossen (oder undicht), fallen in periodischer Folge Tropfen auf den Boden. Diese Dynamik läßt sich aufgrund ihrer strengen Periodizität auch gut vorhersagen.

Bei kleinem Zufluß bildet das Wasser an der Mündung des Hahns Tropfen. Erreichen sie eine kritische Größe, überwiegt die Schwerkraft die Adhäsionskräfte, und die Tropfen fallen zu Boden.

Auch das Fallen ist gut beschreibbar, im wesentlichen durch das Gesetz

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

Hier ist y die Höhe des Tropfens über dem Boden, y_0 die Höhe der Wasserhahnmündung, g die Fallbeschleunigung ($\approx 9.81\frac{m}{s^2}$) und t die Zeit, die nach dem Ablösen des Tropfens vom Hahn vergangen ist.

Anders sieht die Sache aus, wenn der Hahn weiter geöffnet wird: Das einfache periodische Verhalten wird durch doppelt-periodisches Verhalten (das Tropfen bekommt „Rhythmus“) abgelöst, das über weitere Periodenverdopplungen [1] ins Chaos übergeht. Jetzt kann man nicht mehr vorhersagen, wann sich ein Tropfen ablösen wird.

[1]Wenn der Versuch mit dem Wasserhahn zuhause ohne geeignete Meßeinrichtungen durchgeführt wird, lassen sich diese weiteren Verdopplungen allerdings schlecht beobachten.

Für den Ablöseprozeß spielen nun auch Trägheitseffekte eine Rolle; das Modell, das nur Adhäsionskräfte und Schwerkraft beinhaltet, reicht offensichtlich nicht mehr aus. Trotzdem kann die Dynamik bei nicht zu großem Durchfluß noch mit wenigen Variablen beschrieben werden [REHL88]. Weiteres Erhöhen des Durchflusses führt zu einem im oberen Bereich zusammenhängenden Strahl, der weiter unten in unvorhersehbarer Weise in einzelne Tropfen zerfällt.

In diesem Durchflußbereich läßt sich der Strahl gut steuern, indem man den Hahn mit kleinen Vibrationen anregt [Dyk82, S.73], [RJ71], [RJ70].

Dabei kann man völlig periodische Ablösungen von Tropfen erreichen — die Strahldynamik wird wieder vorhersehbar. Man kann sagen, daß die Steuerung die Komplexität des Systems vermindert hat.

Freilich gelingt die Steuerung nicht mit jeder beliebigen Steuerkraft. Vielmehr muß die Kraft gut an die Eigendynamik des Systems angepaßt sein. Sie hängt natürlich auch von der gewünschten Dynamik ab (vgl. Drehpendel, Kapitel 6).

A.1 Versuchsaufbau

Um das Experiment durchzuführen, muß ein senkrechtstehendes Rohr, das die Rolle des Wasserhahns übernimmt, in longitudinale Schwingungen, d. h. Auf- und Abbewegungen versetzt werden. Dies kann z. B. dadurch geschehen, daß man auf die Membran eines Lautsprechers ein Gestell aus Kunststoff aufklebt, wie in Abb. A.1 dargestellt. Daran ist ein kurzes Glasrohr befestigt, etwa durch ein Loch in dem Kunststoffgestell. Es ist streng darauf zu achten, daß sämtliche Befestigungen gegenüber mechanischen Schwingungen stabil sind; auch der Lautsprecher sollte gut festgeklemmt werden. Das Kunststoffgestell sollte die Membran möglichst symmetrisch belasten und der Lautsprecher sollte eher zu groß als zu klein gewählt werden, um Scherschwingungen zu vermeiden. Auf dem Kunststoffgestell wird eine kleine Spule aufgeklebt, die sich mit dem Gestell und dem Rohr mitbewegt.

Die Ansteuerung des Lautsprechers bzw. des Schwingungssystems erfolgt durch einen Funktionsgenerator, oder besser durch einen PC mit ADC-Karte und nachgeschaltetem Verstärker. Damit kann man beliebige Funktionen $f(t)$, $0 < t < T$ in periodischer Wiederholung auf das Schwingungssystem geben. Für die Versorgung mit Flüssigkeit eignet sich ein Überlaufgefäß besonders gut, da so am besten ein konstanter Flüssigkeitsstrom aufrechterhalten wird. Mit einer Spule, über der ein kleiner Magnet fest installiert wird, und einem Oszilloskop läßt sich die eigentliche Bewegung des Ausflußrohres und damit die zeitliche Modulation der Ausfließgeschwindigkeit beobachten.

Abbildung A.1: Versuchsaufbau zur Steuerung des Wasserstrahls

A.2 Erzeugung wählbarer Wellenformen

Verwendet man zur Ansteuerung des Lautsprechers ein sinusförmiges Signal, so kann man zwar einzelne Tropfen erzeugen, eine andere Solldynamik läßt sich so allerdings schlecht erreichen. Für komplexere periodische Tropfenfolgen muß man komplexere Wellenformen verwenden. Zu ihrer Erzeugung gibt es verschiedene Möglichkeiten; der Leser sei hiermit angeregt, sich auch neue einfallen zu lassen. Das Spektrum der einsetzbaren Apparate reicht von Computern mit D/A-Wandler bis zu Synthesizern.

Hier wird ein Gerät beschrieben werden, das für ca. 100 Mark zu bauen ist und den

Vorteil besitzt, daß man die eingestellte Wellenform grafisch sofort ablesen kann.

Abbildung A.2: Schaltbild zum Wellenformgenerator

Das Prinzip ist sehr einfach: Mit einem Multiplexer wird zyklisch eine aus 16 mit je einem Schieberegler einstellbaren Spannungen ausgewählt. Die Wellenform, die sich dabei ergibt, hat die Gestalt einer Treppenkurve mit variablen Stufenhöhen. Die Ecken kann man mit einem nachgeschalteten Tiefpaß abrunden. Die Eckfrequenz des Tiefpasses wird simultan mit der Auswahlfrequenz verstellt, damit sich die Wellenform bei Variation der Frequenz nicht ändert.

Zur Ansteuerung des Multiplexers wird ein Binärzähler mit Taktgenerator verwendet. Will man das Stroboskop mit dem Wellenform-Generator synchronisieren, schließt man dieses an das höchstwertige Bit des Zählers an. Diesen Synchronisationsausgang sollte man ebenso wie den Signalausgang puffern, um ihn gegen Kurzschluß zu sichern.

A.3 Verwendung stroboskopischen Lichts

Den Erfolg der Steuerung kann man bei gewöhnlicher Beleuchtung nicht beobachten, weil die Tropfen so schnell fallen, daß man sie nicht einzeln identifizieren kann. Deshalb ist es naheliegend, ein Stroboskop zu verwenden. Fallen die Tropfen periodisch, erhält man ein stehendes Bild, wenn die Stroboskopfrequenz mit der Tropfenfrequenz übereinstimmt und jeder Tropfen während des Falls die gleichen Formveränderungen erfährt.

In der Tat kann man Einstellungen von Wellenform, Amplitude und Durchfluß finden, die zu verblüffend exakten Wiederholungen in der Tropfenform führen. Verstellt man die Stroboskopfrequenz nur leicht, erhält man ein Bild langsam fallender oder steigender Tropfen. Man kann dann beobachten, daß die Tropfen in sich recht komplizierte Schwingungen ausführen. Durch die Steuerung wird erreicht, daß auch diese Bewegungsformen periodisch werden. Es gibt allerdings auch Einstellungen, die die Dynamik des Strahls verkomplizieren. Zum Beispiel treten manchmal unerwartet Seitenstrahlen mit chaotischen Tropfenfolgen auf, die im ungesteuerten System gar nicht vorhanden waren. Die Eigendynamik des Systems läßt sich durch das Spektrum von Anregungen und erzielter Dynamik charakterisieren.

Es ist bekannt, daß periodische Vorgänge bei Beleuchtung mit stroboskopischem Licht wie in Zeitlupe erscheinen, wenn die Stroboskopfrequenz nur leicht von der Schwingungsfrequenz abweicht. Man kann diesen Effekt ausnutzen, wenn man die Tropfen auf eine ebene Fläche auftreffen läßt und dann wie beschrieben beleuchtet. Das Auseinanderspritzen eines Tropfens kann nun wunderbar beobachtet werden. Wählt man die Stroboskopfrequenz etwas höher als die Schwingungsfrequenz des Lautsprechers, scheinen die Tropfen nach oben zu „fallen“.

Zusammenfassung zum Wasserstrahlversuch

Gesteuerte komplexe Systeme können einfacher als die ungesteuerten Systeme sein, wenn die Steuerung richtig gewählt wird.

Die Steuerkräfte können sehr klein sein.

Zeitlupeneffekte erhält man durch Beleuchtung eines periodischen Strahls mit einem Stroboskop, das fast mit der Tropfenfrequenz blitzt.

Abbildung A.3: Steuerung eines Wasserstrahls zu periodischer Dynamik. Links: ungesteuerter Strahl, daneben 3 gesteuerte Tropfenfolgen für verschiedene Wellenformen der periodischen Anregung. Foto: Ulli Köster, Chaos-Gruppe