Kapitel 6

Anwendungsbeispiel: Resonante Steuerung des Pohl'schen Rades

Die Verfahren zur Modellbildung und Steuerung mit diskreten Modellen werden auf ein experimentelles System, eine nichtlineare Version des Pohl'schen Rades angewendet. Dabei soll explizit auf die Steuerung mit stroboskopischen Abbildungen eingegangen werden. Zur Steuerung mit Poincaré-Abbildungen wird auf die entsprechenden Arbeiten und Publikationen verwiesen [Geo89, GEHL89].

6.1 Versuchsaufbau

Aus der Versuchsbeschreibung zu Bild 6.1 ergibt sich folgende Modelldifferentialgleichung:

$$\ddot{y} + \mu\dot{y} + b_1 y + b_2 y^2 = 0 \tag{6.1}$$

Hierbei ist y die Winkeldifferenz zur Ruhelage, μ die Dämpfungskonstante, b_1 die Federkonstante und b_2 der Koeffizient des nichtlinearen Potentialterms. Die Parameter μ, b_1 und b_2 beinhalten bereits die Division durch das Trägheitsmoment θ des Schwingers. Die Zusatzmasse bewirkt einen Sinusterm im Potential bzw. einen Cosinusterm in der Kraft, der hier bis zur quadratischen Ordnung entwickelt wurde.

Abbildung 6.1: Versuchsaufbau zum nichtlinearen Pohl'schen Rad. Das Pohl'sche Rad ist ein Drehpendel, bestehend aus einer Kupferscheibe (Trägheitsmoment $\theta = 1.6 \cdot 10^{-3}$ kg·m^2), die über eine Spiralfeder mit einem Hebelarm (l=10cm) verbunden ist. Die Spiralfeder (D=0.0165 Nm/rad) bewirkt ein rückstellendes Drehmoment, das proportional ist zur Abweichung von der Ruhelage des Winkels zwischen Kupferscheibe und Hebelarmstellung. Eine Zusatzmasse (m=24g), die auf die Kupferscheibe montiert wird (d=8.5 cm), bewirkt durch ihre Schwerkraft (g=9.81 m/s^2) einen nichtlinearen Term in der Rückstellkraft. Die Drehung wird durch eine Wirbelstrombremse (I=300 mA) gedämpft. Weitere Daten zum Versuchsaufbau siehe [GEHL89, Wor92].
Die Messung des Winkels geschieht durch eine Doppellichtschranke, die einen Winkelstrichcode auf der Scheibe abliest. Die erreichte Genauigkeit lag bei 0.5°. Durch Bewegung des Hebelarms kann das System angeregt oder gesteuert werden. Dieser ist auf einen x-t-Schreiber montiert, der von einem PC mit D/A-Wandler gesteuert wird. Der PC verarbeitet auch die Ergebnisse des Reflexzählers. Die Meßfrequenz war 50 Hz, die Eigenfrequenz des Systems liegt bei etwa 0.5 Hz.

6.2 Modellbildung, Steuerung und Resonanzspektroskopie des Pohl'schen Rades mit Stroboskop-Abbildungen

6.2.1 Ermittlung guter Startwerte für die Modellparameter

Für kleine Zeitschritte τ läßt sich die Differentialgleichung (6.1) mit Hilfe eines Euler-Schritts in eine stroboskopische Abbildung umformen. Der Ansatz bis zu den wichtigen Moden (vgl. Abschnitt 2.2.4)

$$\begin{aligned} y(t+T) &= c_{10}(T)y(t) + c_{01}(T)\dot{y}(t) \\ \dot{y}(t+T) &= d_{10}(T)y(t) + d_{01}(T)\dot{y}(t) + d_{20}(T)y(t)^2 \end{aligned} \tag{6.2}$$

führt für $T = \tau$ auf $c_{10}(\tau) = 1$, $c_{01}(\tau) = \tau$, $d_{10}(\tau) = -b_1\tau$, $d_{20}(\tau) = -b_2\tau$ und $d_{01}(\tau) = 1 - \mu\tau$. τ ist hier das Meß- und Steuerintervall (20 ms) und damit klein im Vergleich zur Schwingungsdauer des Rades (> 2s).

Mit einem Least-Square-Fit gemäß Abschnitt 4.1.1 wurden ungefähre Werte für die Parameter b_1, b_2 und μ bestimmt. Zur Bestimmung von μ wurde dazu der in Abschnitt 4.1.2 erwähnte Trick zur verbesserten Bestimmung der vom Langzeitverhalten bestimmten Parameter verwendet:

Zuerst verschafft man sich die exakten Ausdrücke für die fünf wichtigen Koeffizienten gemäß Abschnitt 2.2.4:

$$\begin{aligned} c_{10}(T) &= \frac{D_2 e^{D_1 T} - D_1 e^{D_2 T}}{D_2 - D_1} \\ c_{01}(T) &= \frac{e^{D_2 T} - e^{D_1 T}}{D_2 - D_1} \\ c_{20}(T) &= b_2 \frac{1}{(D_2 - D_1)^2} \Big(\frac{3D_1^2 - 2D_2^2 - D_1 D_2}{D_1(2D_2 - D_1)} e^{D_1 T} + \frac{3D_2^2 - 2D_1^2 - D_1 D_2}{D_2(2D_1 - D_2)} e^{D_2 T} \\ &+ 2e^{(D_1 + D_2)T} - \frac{D_2^2}{D_1(2D_1 - D_2)} e^{2D_1 T} - \frac{D_1^2}{D_2(2D_2 - D_1)} e^{2D_2 T} \Big) \\ d_{10}(T) &= \frac{D_2 D_1}{D_2 - D_1} (e^{D_1 T} - e^{D_2 T}) \\ d_{01}(T) &= \frac{D_2 e^{D_2 T} - D_1 e^{D_1 T}}{D_2 - D_1} \\ d_{20}(T) &= b_2 \frac{1}{(D_2 - D_1)^2} \Big(\frac{3D_1^2 - 2D_2^2 - D_1 D_2}{D_1(2D_2 - D_1)} D_1 e^{D_1 T} + \frac{3D_2^2 - 2D_1^2 - D_1 D_2}{D_2(2D_1 - D_2)} D_2 e^{D_2 T} \\ &+ 2(D_1 + D_2) e^{(D_1 + D_2)T} - \frac{2D_2^2}{2D_1 - D_2} e^{2D_1 T} - \frac{2D_1^2}{2D_2 - D_1} e^{2D_2 T} \Big) \quad \text{mit} \\ D_{1,2} &= -\mu/2 \pm i\sqrt{4b_1 - \mu^2}/2 \end{aligned}$$

Damit ist eine Relation zwischen den Koeffizienten für verschiedene T gegeben. So läßt sich der Koeffizient $d_{01}(T)$ für Werte von T durch Fit ermitteln, die etwa ein Viertel der Schwingungsperiode des Systems betragen und damit das Dämpfungsverhalten wesentlich präziser widerspiegeln als kleine Zeitschritte. Den für die Steuerung brauchbaren Wert $d_{01}(\tau)$ kann man nun aus den obigen Formeln ermitteln.

6.2.2 Steuerung

Ausgehend von den oben ermittelten Modellparametern wurde das Modell im Computer iteriert und eine Steuerkraft

$$F_i = -2c\mu\tau w_i \tag{6.3}$$

auf das System angewendet. Da die Stroboskopierzeit klein gegenüber der Schwingungsdauer ist, ist die Dynamik zwischen zwei diskreten Zeitpunkten sicher glatt. Damit wählt man zur Kraftübertragung Methode 3 (Seite 59). Die Konstante c beinhaltet zwei andere Systemparameter: den Hebelarm und die Verstärkung des $x-t$-Schreibers. Die zu dieser Steuerkraft gehörige Solldynamik

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \tau\, w_i \\ w_{i+1} &= -b_1\tau\, y_i - b_2\tau\, y_i^2 + (1+\mu\tau)w_i \end{aligned} \tag{6.4}$$

ist eine Zeitspiegelung des Ausschwingverhaltens und damit eine resonante Anregung des Schwingers [RHL87].

6.2.3 Resonanzspektroskopie

Nun wurden verschiedene Modellparameter variiert und dabei die mittlere Abweichung des Ist- vom Sollverhalten registriert. Die jeweils anderen Parameter wurden auf den Wert gesetzt, der sich durch obige Abschätzung ergab.

Das Resultat sind Resonanzkurven, deren Minimum die optimalen Parameter ergibt.

Die Wirkung einer Steuerung, die auf den so ermittelten Parametern beruht, zeigt Abbildung 6.3. Die mittlere Abweichung zwischen Soll- und Istdynamik beträgt nur etwa 1°.

telbug@ncsa.uiuc.edu

Abbildung 6.2: Die mittlere Abweichung der Ist- von der Solldynamik als Funktion des Modellparameters (Resonanzspektroskopie) für b_1, b_2 und μ. Die Fehlerbalken wurden durch zehnmalige Wiederholung des Versuchs ermittelt. Die Lage des Minimums bestimmt den optimalen Wert mit einer Genauigkeit von 0.4% für b_1, 1.5% für b_2 und 2% für μ.

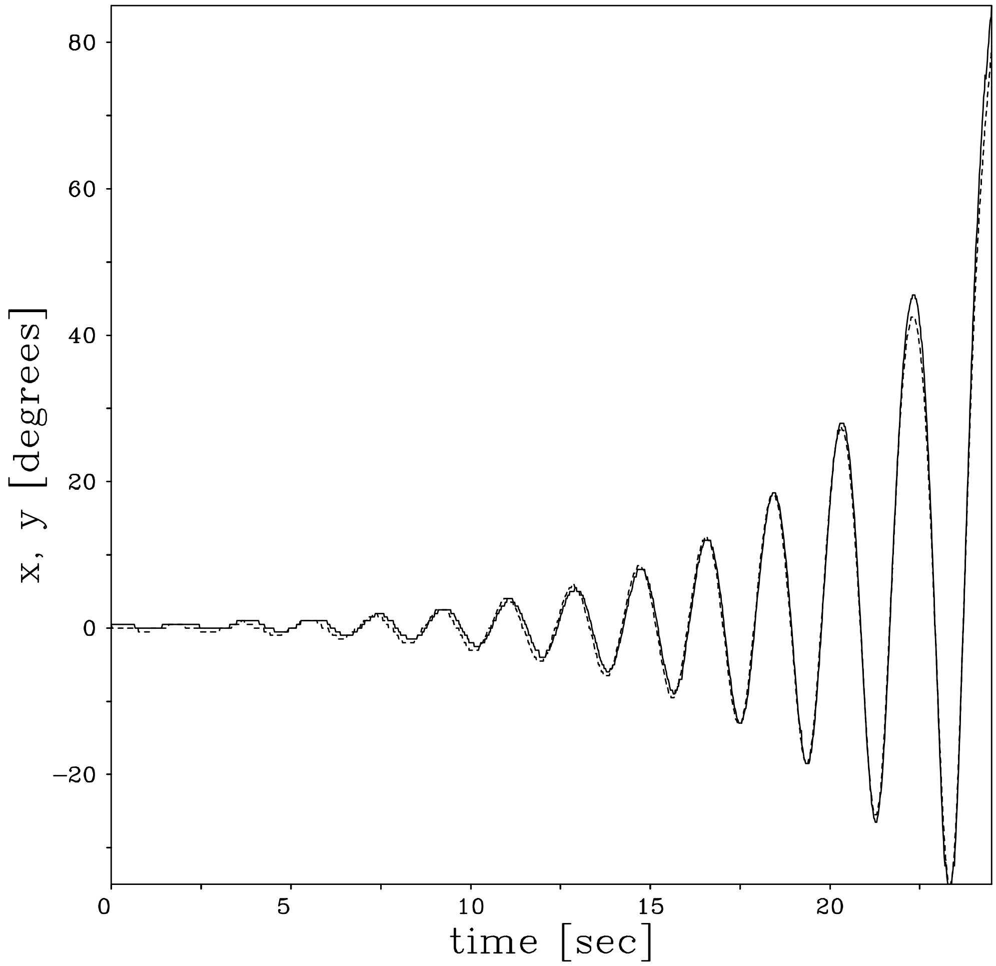

Abbildung 6.3: Direkter Vergleich zwischen Solldynamik (gestrichelte Kurve) und Istdynamik (durchgezogene Kurve). Der Unterschied verschwindet größtenteils innerhalb der Strichbreite.