Kapitel 5

Rückkopplungsfreie Steuerung nichtlinearer Systeme mit diskreten Abbildungen

Eines der Hauptziele der Modellbildung ist die Ermittlung optimaler Steuerkräfte, mit denen man ein gegebenes dynamisches System zu einer vorgebbaren Wunschdynamik zwingen kann. In diesem Kapitel soll beschrieben werden, wie sich derartige Steuerkräfte aus Abbildungen berechnen lassen, die als Modell für die Eigendynamik des Systems dienen. Diese Abbildungen lassen sich mit den Methoden aus Kapitel 2 aus Differentialgleichungen berechnen oder — wie in Kapitel 4 — aus experimentellen Zeitreihen der ungestörten Dynamik gewinnen.

Die hier beschriebenen Ansätze sind Weiterentwicklungen der Steuertheorie von Hübler [Hüb87, HL89], die erfolgreich zur Steuerung von kontinuierlichen Systemen mit kontinuierlichen Steuerkräften [RHL87, WSHL88], sowie zur Steuerung der logistischen Abbildung [JH90] verwendet wurde.

Ein besonderes Merkmal dieser Steuerungstheorie gegenüber anderen [OGY90, SRR90, HL90] ist das Fehlen der Rückkopplung zum experimentellen System während des Steuerungsvorgangs. Damit ist die Möglichkeit geschaffen, auch Systeme zu beherrschen, bei denen eine Rückkopplung unmöglich erscheint, etwa bei moleküldynamischen Prozessen. Andere Weiterentwicklungen von Hüblers Theorie zielen auf die Anwendbarkeit bei sich verändernden Sytemen [Hüb89], Systemen mit verborgenen Variablen [BH90] oder mit Rauschen [BDH90] ab.

In den folgenden Abschnitten soll gezeigt werden, wie man *kontinuierliche Systeme* mit *diskreten* Abbildungen rückkopplungsfrei steuern kann. Dazu soll zunächst die Steuerungstheorie für diskrete Systeme skizziert werden. Die Steuerung mit diskreten Abbildungen — insbesondere mit Poincaré-Abbildungen — hat gegenüber der Steuerung mit Differentialgleichungen zwei entscheidende Vorteile:

- Abbildungen lassen sich aus experimentellen Daten leichter rekonstruieren als Differentialgleichungen.
- Die Dimension von Poincaré-Abbildungen ist um wenigstens eins geringer als die Dimension der zugehörigen Differentialgleichung. Damit genügt bei einer beliebigen Wunschdynamik auch eine Antriebskraft mit einer um wenigstens eins niedrigeren Zahl von Komponenten. Da man oft nur eine einzige Komponente steuern kann, hilft die Verwendung von Poincaré-Abbildungen wesentlich bei der Realisierung einer großen Zahl von Wunschdynamiken, auf die das System stabil gesteuert werden kann.

5.1 Steuerung diskreter Systeme

Gegeben sei ein experimentelles System, dessen Dynamik durch eine Abbildung $\vec{\tilde{f}}$ beschrieben werden kann:

$$\vec{\tilde{y}}_{i+1} = \vec{\tilde{f}}(\vec{\tilde{y}}_i) + \vec{K}_i \tag{5.1}$$

Dabei sei $\vec{\tilde{y}}_i$ der Zustandsvektor des Systems zum Zeitpunkt t_i und $\vec{K}_i$ die — noch zu berechnende — Steuerkraft, die bei t_i appliziert werden soll. Falls $\vec{\tilde{f}}$ eine stroboskopische Abbildung ist, gilt: $t_i = i \cdot T + t_0$, wobei T die Stroboskopierzeit ist. Im Falle von Poincaré-Abbildungen sind die t_i durch die Zeitpunkte des Durchstoßes der Trajektorie durch die Poincaré-Ebene gegeben.

Von der Eigendynamik des experimentellen Systems existiere ein Modell:

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{f}(\vec{y}_i) \tag{5.2}$$

Dieses Modell soll nicht zu schlecht sein, d.h. es soll gelten: $\vec{\tilde{f}} \approx \vec{f}$. Zunächst soll der Einfachheit halber nur der Fall $\vec{\tilde{f}} = \vec{f}$ und $\vec{\tilde{y}}_i = \vec{y}_i$ behandelt werden; das Modell soll exakt sein. Die Auswirkungen von Abweichungen in den Modellparametern wird in [CHP89] diskutiert und im Abschnitt 5.4 zur genauen Ermittlung der Modellparameter verwendet.

Die Wunschdynamik kann man ebenfalls als Abbildung definieren:

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{g}(\vec{x}_i) \tag{5.3}$$

Die Abweichung $\vec{\varepsilon}_i := \vec{y}_i - \vec{x}_i$ der Istdynamik von der Solldynamik muß für $i \to \infty$ gegen Null streben, wenn die Steuerung stabil sein soll.

Die Wahl

$$\vec{K}_i{}^* = -\vec{f}(\vec{y}_i) + \vec{g}(\vec{x}_i) \tag{5.4}$$

für die Antriebskraft bewirkt offensichtlich eine Zerstörung der Eigendynamik des Systems und eine Etablierung der Wunschdynamik. $\vec{\varepsilon}_i$ wird dadurch bereits nach dem ersten Schritt exakt Null. In diese Steuerkraft geht aber noch $(\vec{y}_i)$ ein, es ist also Rückkopplung notwendig.

Der rückkopplungsfreie Ansatz

$$\vec{K}_i = -\vec{f}(\vec{x}_i) + \vec{g}(\vec{x}_i) \tag{5.5}$$

führt zu einem gesteuerten System, dessen Abweichung folgender Iterationsgleichung gehorcht:

$$\vec{E}(\varepsilon_i) := \vec{\varepsilon}_{i+1} = \vec{f}(\vec{x}_i + \vec{\varepsilon}_i) - \vec{f}(\vec{x}_i) \tag{5.6}$$

$\vec{\varepsilon}_i = \vec{0}$ ist dabei offensichtlich ein Fixpunkt der Funktion $\vec{E}$, d.h. wenn das System einmal den Wunschzustand erreicht, wird es ihn auch beibehalten. Interessanter ist aber die Frage nach der Stabilität dieses Fixpunktes, also die Frage, ob eine erfolgreiche Steuerung auch dann möglich ist, wenn der Anfangszustand des experimentellen Systems unbekannt ist oder Rauschen vorliegt.

Lineare Stabilitätsanalyse liefert folgende hinreichende Bedingung für die Stabilität der Steuerung[1]:

> Die rückkopplungsfreie Steuerung diskreter Systeme ist dann stabil, wenn alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix $(\frac{\partial E_j}{\partial \varepsilon_k})$ für alle Werte $\vec{x}_i$ der Wunschdynamik innerhalb des Einheitskreises liegen.

5.2 Kraftübertragung auf kontinuierliche Systeme

Liegt eine stroboskopische Abbildung als Modell des Systems vor, und ergibt sich mit der oben skizzierten Stabilitätsanalyse eine stabile Steuerkraft zu einer gegebenen Wunschdynamik, so kann ein physikalisches System damit rückkopplungsfrei gesteuert werden.

Zusätzlich zu den Ausführungen am praktischen Beispiel in Kapitel 6 soll an dieser Stelle eine für die allgemeine Anwendbarkeit des Verfahrens entscheidende Frage erörtert werden: Wie steuert man *kontinuierliche* Systeme mit *diskreten* Kräften?

Zum einen muß — zumindest bei der Verwendung von Poincaré-Abbildungen — außer dem Modell f für die Dynamik der $\vec{y}_i$ noch ein Modell für die Zeitabstände $T_i(\vec{y}_i) := t_{i+1} - t_i$ gegeben sein, um die Steuerung im richtigen Moment anbringen zu können.

[1] Eine weniger strenge Bedingung für periodische Antriebskräfte ist in [JH90] hergeleitet. Für die Zwecke dieser Arbeit genügt allerdings auch das angegebene, einfachere Kriterium.

Zum anderen stellt sich die Frage, wie eine Steuerkraft $\vec{F}_c(t)$ mit

$$\vec{F}_c(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{K}_i \delta(t - t_i) \tag{5.7}$$

die nur zu diskreten Zeitpunkten t_i gegeben ist, auf ein kontinuierliches System

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}) + \vec{F}_c(t) \tag{5.8}$$

angewendet werden kann. Dazu muß man drei Fälle unterscheiden:

1. **Die Dauer der Kraftübertragung ist sehr klein gegenüber der typischen Zeitskala des Systems.**
   Dieser Fall ist z.B. gegeben bei dem Problem eines auf einer schweren, vibrierenden Platte hüpfenden Balles [GH83, S.102ff]. Wenn für die Modellierung und die Steuerung des Systems die gleichen diskreten Zeitpunkte gewählt werden, ist die Steuertheorie aus Abschnitt 5.1 direkt anwendbar.

2. **Statt eines δ-förmigen Kraftstoßes verwendet man einen rechteckförmigen Kraftverlauf.**
   Die δ-Funktion in (5.7) wird ersetzt durch

   $$\delta(t - t_i) \approx \frac{1}{dt} \left(\Theta(t - t_i - dt) - \Theta(t - t_i) \right) \tag{5.9}$$

   Dabei ist dt die Länge des Kraftstoßes. Das Ende der Krafteinwirkung trifft hier mit dem nächsten diskreten Zeitpunkt des Modells zusammen.

3. **Die Dynamik des Systems zwischen zwei diskreten Zeitpunkten ist glatt.**
   Bei einer großen Zahl von gedämpften mechanischen Schwingern fallen höhere Fourier-Komponenten rasch ab. Dann läßt sich eine kontinuierliche Approximation der diskreten Dynamik durch glatte Interpolation erhalten. Die Interpolation wird in einigen Fällen durch die Trägheit und die Dämpfung des Systems automatisch bewerkstelligt.

5.3 Steuerung mit Poincaré-Abbildungen

Ist nur eine Poincaré-Abbildung bekannt, so ergibt sich zusätzlich zu den im letzen Abschnitt erwähnten Problemen noch das Problem, daß man wissen muß, *wann* das System die Poincaré-Ebene durchstößt, um die Kraft im richtigen Moment anwenden zu können.

Will man rückkopplungsfrei steuern, so wird man den optimalen Zeitpunkt der Krafteinwirkung in der Regel nicht treffen, sondern mit einem Zeitfehler δt_i. Wenn es einen stabilisierenden Effekt gibt, so daß durch die Systemdynamik der nächste Zeitfehler δt_{i+1} betragsmäßig kleiner ist als δt_i, gibt es einen Bereich von Anfangsbedingungen, für den die Steuerung mit Poincaré-Abbildungen ohne jede Rückkopplung funktioniert [ESGH92].

Aus experimentellen Daten oder aus einer Differentialgleichung numerisch abgeleitet seien gute Approximationen für die Funktionen $\vec{X}$ und T

$$\vec{X} : \vec{x}(t) \mapsto \vec{x}\,(t + T(\vec{x}_P)) \tag{5.10}$$

bekannt, wobei $T(\vec{x}_P)$ die Wiederkehrzeit auf die Poincaré-Ebene $\mathcal{P}$ angibt, wenn von $x_P \in \mathcal{P}$ gestartet wird. x_P soll dabei der zu $x(t)$ nächstgelegene Punkt der Poincaré-Ebene sein. Die Stabilität der Steuerung ergibt sich wie oben erläutert aus den Eigenwerten der Jacobi-Matrix:

$$\hat{M} = \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_k}\right)\Bigg|_{\vec{x}=\vec{x}_P} \tag{5.11}$$

Für dissipative dreidimensionale Systeme läßt sich noch ein einfacheres Kriterium angeben. Es sei hier vorausgesetzt, daß ein Koordinatensystem so gewählt werden kann, daß die Poincaré-Abbildung mit der Poincaré-Ebene $\mathcal{P} : \{\vec{x}|x_2 = 0\}$ sich gut durch eine eindimensionale Abbildung $P_1 : (x_1)_n \longmapsto (x_1)_{n+1}$ approximieren läßt, wobei $(x_1)_n$ der Wert von x_1 beim n-ten Durchstoß ist. Dann schrumpft die Stabilitätsmatrix auf:

$$M(x_1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}\Bigg|_{x_2=0} =: \begin{pmatrix} m_{11}(x_1) & m_{12}(x_1) \\ m_{21}(x_1) & m_{22}(x_1) \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

Für x_1 sind die Punkte der Wunschdynamik einzusetzen.

Da m_{12} aufgrund des senkrechten Durchstoßes der Trajektorie durch die Poincaré-Ebene verschwindet, ergeben sich die Eigenwerte von M zu $\lambda_1 = m_{11}$ und $\lambda_2 = m_{22}$. $|\lambda_1|$ muß kleiner als 1 sein, wenn die Steuerung innerhalb der Poincaré-Ebene stabil sein soll, während $|\lambda_2| < 1$ die Stabilität in Trajektorienrichtung — also gegen Fehler in der Wahl des Steuerungszeitpunktes — garantiert.

Der Wert von λ_2 läßt sich in einigen Fällen statt durch Bestimmung der zweidimensionalen Abbildung $\vec{X}$ auch durch folgende Abschätzung gewinnen, wenn die Winkelgeschwindigkeit der Trajektorie in der (x_1, x_2)-Ebene in der Nähe der Poincaré-Ebene nahezu konstant ist. Dann gilt nämlich:

$$\lambda_2 \approx \frac{(x_1)_{n+1}}{(x_1)_n} \approx \frac{P_1((x_1)_n)}{(x_1)_n} \tag{5.13}$$

Abbildung 5.1: Zur Veranschaulichung der Näherung für λ_2 in (5.13). Für den Fall näherungsweise konstanter Winkelgeschwindigkeit verhalten sich die Abweichungen in x_2-Richtung wie die Abweichungen in x_1-Richtung.

Damit ist die Steuerung stabil, falls

$$|P_1((x_1)_n)| < |(x_1)_n| \tag{5.14}$$

für alle Punkte $(x_1)_n$ der Wunschdynamik gilt.

Anwendung auf das Rössler-System

Das Rössler-System (1.3) erfüllt die Bedingungen des letzten Abschnitts. Dazu wählt man als Poincaré-Ebene $x_2 = 0, \dot{x}_2 < 0$, weil in diesem Bereich x_3 nahezu verschwindet (vgl. Abb. 1.6). Die Dynamik auf dem Poincaré-Schnitt kann also näherungsweise eindimensional betrachtet werden. Außerdem hängt die Wiederkehrzeit zur Poincaré-Ebene in der Nähe des Attraktors nur schwach von x_1 ab (vgl. Abb. 5.2).

Auch der nächste x_1-Wert hängt nur sehr schwach vom Anfangswert von x_3 ab (vgl. Abb. 5.3). Im folgenden wird deshalb die Abhängigkeit von der x_3-Komponente vernachlässigt. Durch Anwendung numerischer Verfahren (vgl. Kapitel 2.2.2) erhält man Polynomapproximationen für die Wiederkehrzeit und den nächsten x_1-Wert als Funktion der Anfangswerte für x_1 (Tabelle 5.1).

Diese Approximationen stellen das diskrete Modell des Rössler-Systems dar, mit dem es nun gesteuert werden soll. Als Solldynamik wurde eine periodische Dynamik des kontinuierlichen Systems, also ein Fixpunkt in der Poincaré-Ebene gewählt:

Abbildung 5.2: Wiederkehrzeit zur Poincaré-Ebene ($x_2 = 0, \dot{x}_2 < 0$) des Rössler-Systems mit $\mu = 4.5$ (links) und $\mu = 8$ (rechts) als Funktion der Anfangsbedingungen für x_1 und x_3.

Abbildung 5.3: x_1-Wert des Rössler-Systems beim nächsten Durchstoß durch die Poincaré-Ebene ($x_2 = 0, \dot{x}_2 < 0$) als Funktion der Anfangsbedingungen für x_1 und x_3. Links: $\mu = 4.5$. Rechts: $\mu = 8$

$$x_{1i+1} = \sum_{j=0}^{5} c_j {x_{1i}}^j$$

μ	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
4.5	-39.165	- 37.313	- 14.740	-2.5560	- 0.19506	- 0.0052418
6.0	9.3933	14.285	6.2026	1.4569	0.16034	0.0063821
8.0	6.1625	7.3908	1.8290	0.26529	0.014431	$-5.6356 \cdot 10^{-8}$

$$T_i = \sum_{j=0}^{5} c'_j {x_{1i}}^j$$

μ	c'_0	c'_1	c'_2	c'_3	c'_4	c'_5
4.5	9.3805	3.2309	1.3117	0.25543	0.023922	0.00092793
6.0	7.0063	0.51449	0.12478	0.0088353	- 0.00040212	- 0.000030897
8.0	6.03831	- 0.24987	- 0.081352	- 0.011296	- 0.00052996	0.0000069055

Tabelle 5.1: Numerisch gewonnene Polynom-Approximationen 5. Grades für die Wiederkehrzeit und x_1-Wert beim nächsten Durchstoß durch die Poincaré-Ebene als Funktion des Anfangswertes für x_1. Für x_3 wurde als Anfangswert $x_3 = 0$ gewählt. Die Fits gelten für $x_1 \in [-9, -3]$ bei $\mu = 6$ und $\mu = 8$ bzw. für $x_1 \in [-8, -3]$ bei $\mu = 4.5$.

$$\vec{w}_{i+1} = \vec{g}(\vec{w}_i) = \begin{pmatrix} w_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

Dabei wurde für die Lage des Sollfixpunkts einmal $w_S = -8$, zum anderen $w_S = -5$ gewählt. Die Anwendung des Stabilitätskriteriums aus den Gleichungen (5.12) bis (5.14) liefert die Eigenwerte aus Tabelle 5.2. Eine stabile rückkopplungsfreie Steuerung auf eine periodische Wunschdynamik ist also für $\mu = 4.5$ möglich. Für $\mu = 6$ und $\mu = 8$ gibt es keinen Bereich für w_S, in dem beide Eigenwerte betragsmäßig kleiner als eins sind. Eine stabile Steuerung ist für diese Fälle also nicht zu erwarten.

Abb. 5.4 zeigt die Wirkung der Anwendung einer δ-förmigen Steuerkraft auf das kontinuierliche System.

Da bei realen Sytemen δ-förmige Kraftimpulse oft nicht angewendet werden können, wird nun das Verhalten bei Steuerung mit Rechteckimpulsen (Methode 2, Seite 59) untersucht. Abb. 5.5 zeigt für verschiedene Pulslängen dt die mittlere quadratische Abweichung der gesteuerten Dynamik von der Wunschdynamik

$$\Delta = \frac{1}{N} \sum_{i=N_0}^{N_0+N} \left((y_1)_i - w_S\right)^2 \tag{5.16}$$

μ	w_S	λ_1	λ_2
4.5	-8	-0.096598	0.32000
4.5	-5	-0.46185	1.4280
6	-8	-2.8977	0.78038
6	-5	1.3027	1.7628
8	-8	-0.49453	1.5777
8	-5	1.7813	1.8414

Tabelle 5.2: Eigenwerte der Stabilitätsmatrix (5.12) unter Verwendung der Abschätzungen (5.13) und (5.14) für das Rössler-System für verschiedene Werte von μ und w_S. Eine stabile Steuerung ist demnach für $\mu = 4.5$ und $w_S = -5$ möglich.

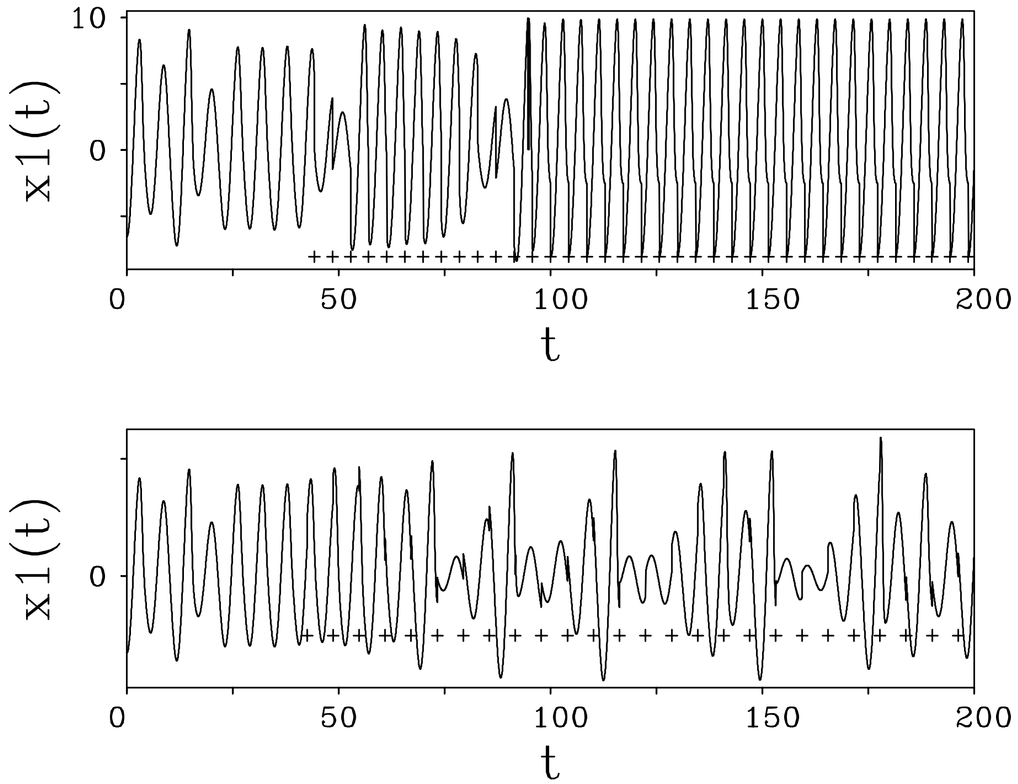

Abbildung 5.4: Steuerung des Rössler-Systems mit $\mu = 4.5$ mit δ-förmigen Pulsen. Die Bilder zeigen numerische Simulationen des kontinuierlichen Systems. Ab $t = 40$ wird die Steuerung eingeschaltet. Oben: $w_S = -8$. Unten: $w_S = -5$. Die Stabilisierung wirkt nur in einer Umgebung der Solldynamik. Deshalb dauert es für $w_S = -8$ noch einige Zeit, bis die Steuerung greift. Für $w_S = -5$ ist die Steuerung instabil. Die durchgezogene Linie stellt den Zeitverlauf der x_1-Koordinate des gesteuerten Systems dar, die Kreuze die Punkte der Wunschdynamik.

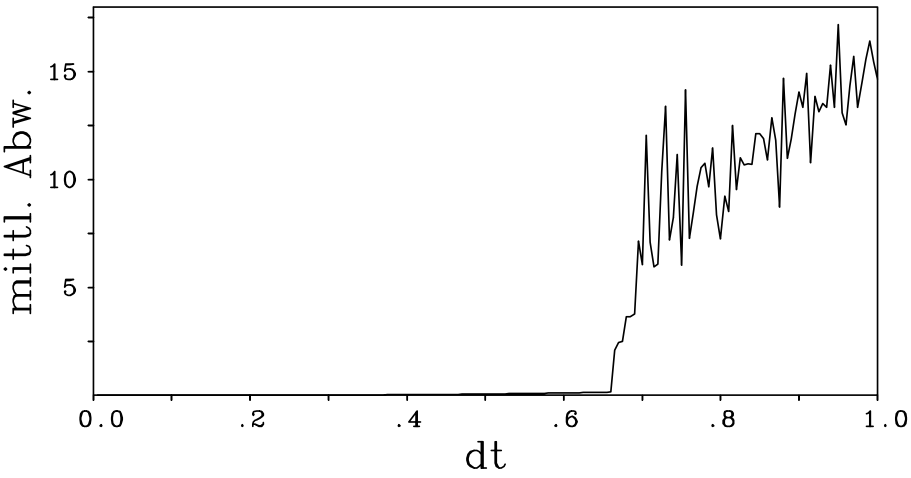

Abbildung 5.5: Steuerung des Rössler-Systems für $\mu = 4.5$ und $w_S = -8$. Aufgetragen ist die mittlere quadratische Abweichung (5.16) als Funktion der Pulslänge dt. Die Mittelung erfolgte über $N = 100$ Perioden der Wunschdynamik, nachdem bereits $N_0 = 100$ Perioden lang gesteuert wurde. Für $dt \leq 0.66$ ergeben sich kleine Abweichungen, die etwa proportional zu dt sind und größtenteils innerhalb der Strichbreite verschwinden. Die Solldynamik wird aber immer noch qualitativ erreicht. Für $dt > 0.66$ greift die Steuerung nicht mehr.

5.4 Nichtlineare Resonanzspektroskopie

Abweichungen der Modellparameter von den wahren Werten führen zu Abweichungen der Soll- von der Istdynamik des gesteuerten Systems. Diese Tatsache läßt sich hervorragend nutzen, um durch Variation der Modellparameter und Überwachung der Antwort des Systems genauere Werte für die Modellparameter zu ermitteln.

Dazu wird die mittlere Abweichung

$$\Delta = \frac{1}{N} \sum_{i=N_0+1}^{N_0+N} \left(\|\vec{\tilde{y}}_i - \vec{x}_i\| \right)^2 \tag{5.17}$$

der gesteuerten Dynamik von der Solldynamik gegen den vermuteten Wert des Modellparameters aufgetragen. Das Zeitfenster $i \in \{N_0+1, N_0+2, \ldots, N_0+N\}$ wird so gewählt, daß nach dem Einschwingen des Systems noch genügend Datenpunkte zur Mittelung zur Verfügung stehen. Es ergibt sich ein deutliches Minimum beim korrekten Wert. Das gilt auch bei der Anwesenheit von Rauschen.

Beispiel: Resonanzspektroskopie für die logistische Abbildung

Als einfaches Beispiel soll sowohl als Modelldynamik als auch als Wunschdynamik eine logistische Abbildung vorliegen:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_{i+1} &= \tilde{f}(\tilde{y}_i) = \tilde{a}\tilde{y}(1-\tilde{y}) + K_i \\
y_{i+1} &= f(y_i) = ay(1-y) \\
x_{i+1} &= g(x_i) = a_g x(1-x) \\
\Longrightarrow K_i &= (a_g - a)x(1-x)
\end{aligned}$$

Das wahre System, das Modell- und das Wunschsystem unterscheiden sich hier in einem Parameter. Stimmt a mit $\tilde{a}$ überein, verschwindet die Abweichung von Ist- und Solldynamik (Abb. 5.6).

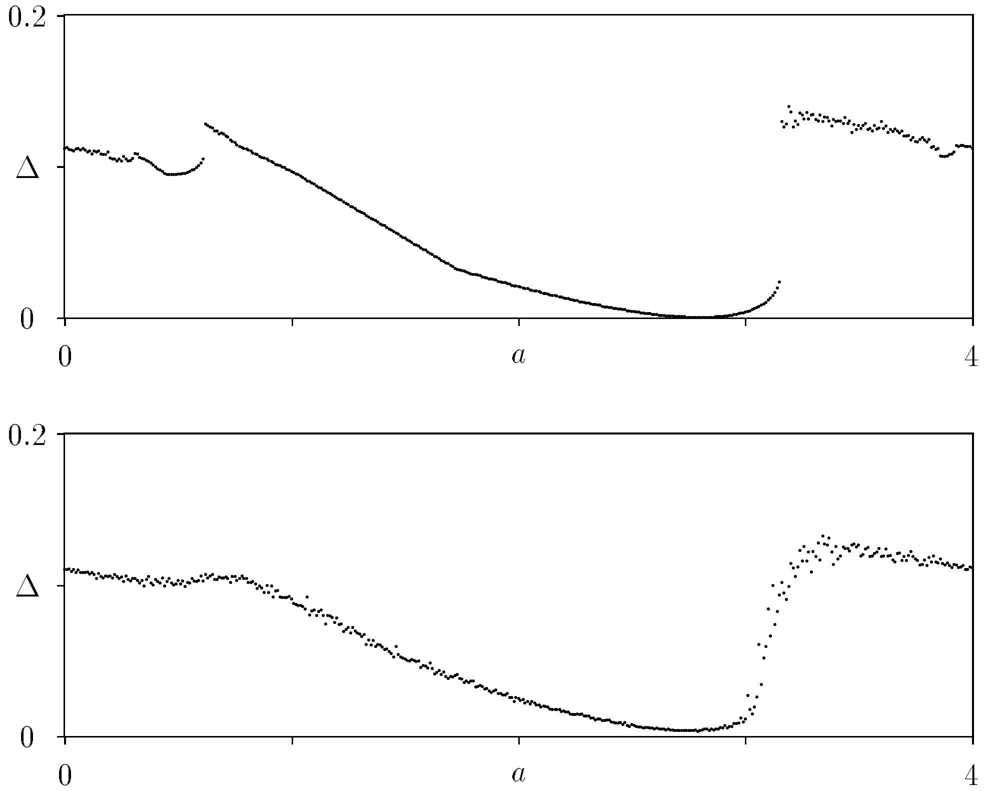

Abbildung 5.6: Die mittlere quadratische Abweichung der Ist- von der Solldynamik bei der Steuerung einer logistischen Abbildung mit $\tilde{a} = 2.8$ auf eine Solldynamik (hier eine logistische Abbildung mit $a_g = 2.0$) als Funktion des vermuteten Wertes für a. Die Mittelung erfolgte über 200 Iterationen nach einem Einschwingen von ebenfalls 200 Iterationen. Oben: ohne Rauschen. Unten: mit additivem gleichverteiltem Rauschen aus dem Intervall $[-0.1, 0.1]$