Kapitel 3

Asynchrone Zellularautomaten als Modelle für raum-zeitliche Dynamik

Die Dynamik von Systemen mit raum-zeitlicher Dynamik wird gerne mit zellulären Automaten simuliert. Dies erscheint vor allem bei nichtlinearen Vorgängen sinnvoll, weil bei der Simulation eines zellulären Automaten keine zusätzlichen Fehler auftreten. Alle möglichen Fehler werden beim Modellbildungsprozeß selbst gemacht. Die Güte des Modells läßt sich durch Vergleich der Simulationsergebnisse mit experimentellen Daten ermitteln. Für die Modellierung mit partiellen Differentialgleichungen gilt dies nicht, weil deren Lösung sowohl analytisch als auch numerisch kritisch ist.

Es soll zunächst das Konzept der zellulären Automaten erklärt werden, und dabei auch das neue Konzept der dosiert-asynchronen Steuerung. Danach werden Anwendungen in biologischen und chemischen Systemen mit dem Greenberg-Hastings-Modell sowie in der Geologie mit dem Schulz-Modell gezeigt.

3.1 Synchrone und asynchrone zelluläre Automaten

Ein zellulärer Automat ist ein Kristall aus Zellen, deren diskrete Zustände sich zeitlich verändern. Der Zustand im nächsten Zeitschritt ergibt sich durch eine deterministische Regel aus dem alten Zustand und dem Zustand der nächsten (evtl. auch übernächsten) Nachbarzellen. Eine Zelle verkörpert einen mesoskopischen Bereich eines physikalischen Gebietes. Alle Zellen sind gleich, evtl. mit Ausnahme von Randzellen.

Als Gittergeometrie verwendet man im allgemeinen quadratische oder hexagonale Gitter. Für das zweidimensionale, quadratische Gitter gibt es zwei gebräuchliche Nachbarschaftsdefinitionen: Die von Neumann-Nachbarschaft besteht nur aus den 4 nächsten Nachbarn, während die Moore-Nachbarschaft auch die 4 diagonalen Nachbarn miteinbezieht.

Mathematisch schreibt sich ein von Neumann-Zellularautomat wie folgt:

$$z_{j,k}(t_{i+1}) = f\left(z_{j,k}(t_i), z_{j+1,k}(t_i), z_{j-1,k}(t_i), z_{j,k+1}(t_i), z_{j,k-1}(t_i)\right) \tag{3.1}$$

Dabei sind die t_i diskrete Zeitpunkte. Die Indizes j und k bezeichnen den Ort der Zelle.

Bei der Simulation auf einem Rechner können nicht alle Zellen gleichzeitig berechnet werden. Vielmehr gliedert sich der gesamte Berechnungsprozeß in einen

- **Berechnungsschritt**, in dem die Funktion f berechnet wird, und einen
- **Aktualisierungsschritt**, in dem der Funktionswert als neuer Zustand der Zelle angenommen wird.

Durch diese Trennung wird sichergerstellt, daß sich ein Zellenzustand nicht während der Auswertung durch eine Nachbarzelle verändert. Die Reihenfolge der Berechnung ist beliebig, solange sie konstant bleibt. Dieses sequentielle Arbeiten kann man mit einem Warteschlangenmodell verdeutlichen:

Eine dosierte Asynchronität ergibt sich durch die Einführung eines Vordrängelbereiches (vgl. Abb. 3.1). Eine Zelle, die gerade abgearbeitet wurde, stellt sich nicht hinten an, sondern drängelt sich etwas vor. Die Zahl der Zellen, die sie überspringt, wird zufällig aus einem bestimmten Bereich ausgewählt. Die Zelle, deren Stelle durch die Vordrängelaktion besetzt wurde, muß sich hinten anstellen. Eine Definition einer dosierten Asynchronität ergibt sich direkt aus dem Verhältnis der Länge des Vordrängelbereiches zur Gesamtlänge der Schlange:

$$\alpha := \frac{\text{Länge des Vordrängelbereiches}}{\text{Gesamtzahl der Automatenzellen}} \tag{3.2}$$

Für einen kompletten Zyklus muß jede Zelle zweimal bearbeitet werden, einmal für den Berechnungs- und einmal für den Aktualisierungsschritt. Unter einem **Durchlauf** soll im folgenden eine Sequenz von $2N_z$ Schritten verstanden werden. Dies ist genau die Zahl, die im synchronen Fall für einen Zyklus benötigt wird.

Auf Parallelrechnern können asynchrone Verfahren von Vorteil sein, weil die Synchronisation der Einzelrechner Rechenleistung kostet. Die Idee von asynchronen Automaten wurde deshalb auch von anderen Autoren verfolgt (z.B. [IB84]). Diese Autoren stellten auch fest, daß einige der Strukturbildungseffekte bei zellulären Automaten Artefakte der synchronen Steuerung sind, andererseits mit der asynchronen Steuerung Strukturen entstehen, die nicht mit synchronen Automaten zu

Abbildung 3.1: Zwei verschiedene Warteschlangenmodelle für Zellen eines Zellularautomaten. Die obere Schlange beschreibt die übliche sequentielle Bearbeitungsstrategie angewendet auf eine gemischte Schlange. Sie liefert die gleichen Resultate wie eine ungemischte Schlange, solange Berechnungs- und Aktualisierungsschritt strikt getrennt bleiben. Durch die Vordrängelmöglichkeit wie in der unteren Schlange ergibt sich eine ständige Weitermischung der Abarbeitungsreihenfolge.

modellieren waren. Bei den dort untersuchten Asynchronitätskonzepten ist nicht gewährleistet, daß alle Zellen im Mittel gleich oft bearbeitet werden. Dies erscheint jedoch notwendig und sinnvoll, wenn man raum-zeitliche Dynamik auf homogenen Medien simulieren will.

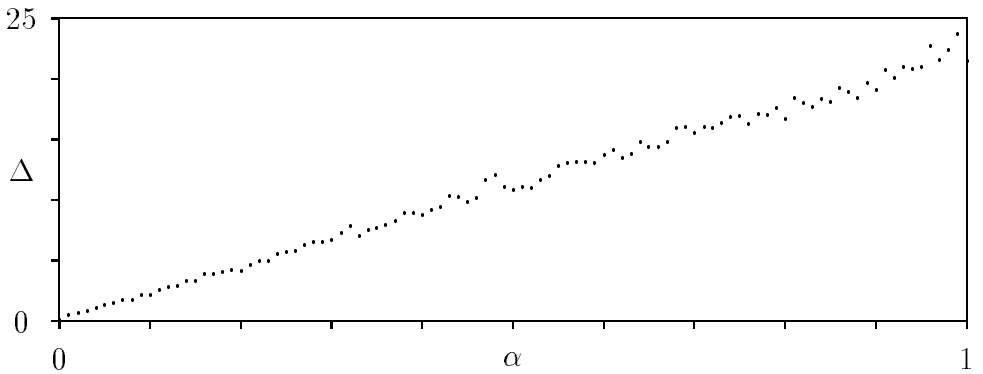

Abbildung 3.2: Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\frac{1}{400}\sum_{j=1}^{400}\left(N_a(j)-500\right)^2}$ der Zahl der Aufrufe eines Automaten mit 400 Zellen nach 500 Durchläufen mit asynchroner Steuerung mit dem Warteschlangenmodell als Funktion von α (aus [Sch90a]).

Dieses Problem tritt beim Warteschlangenmodell nicht auf. Abb. 3.3 zeigt die Aufrufhäufigkeit $N_a(j)$ der Zellen nach 500 Durchläufen. Auch bei hohen Asynchro-

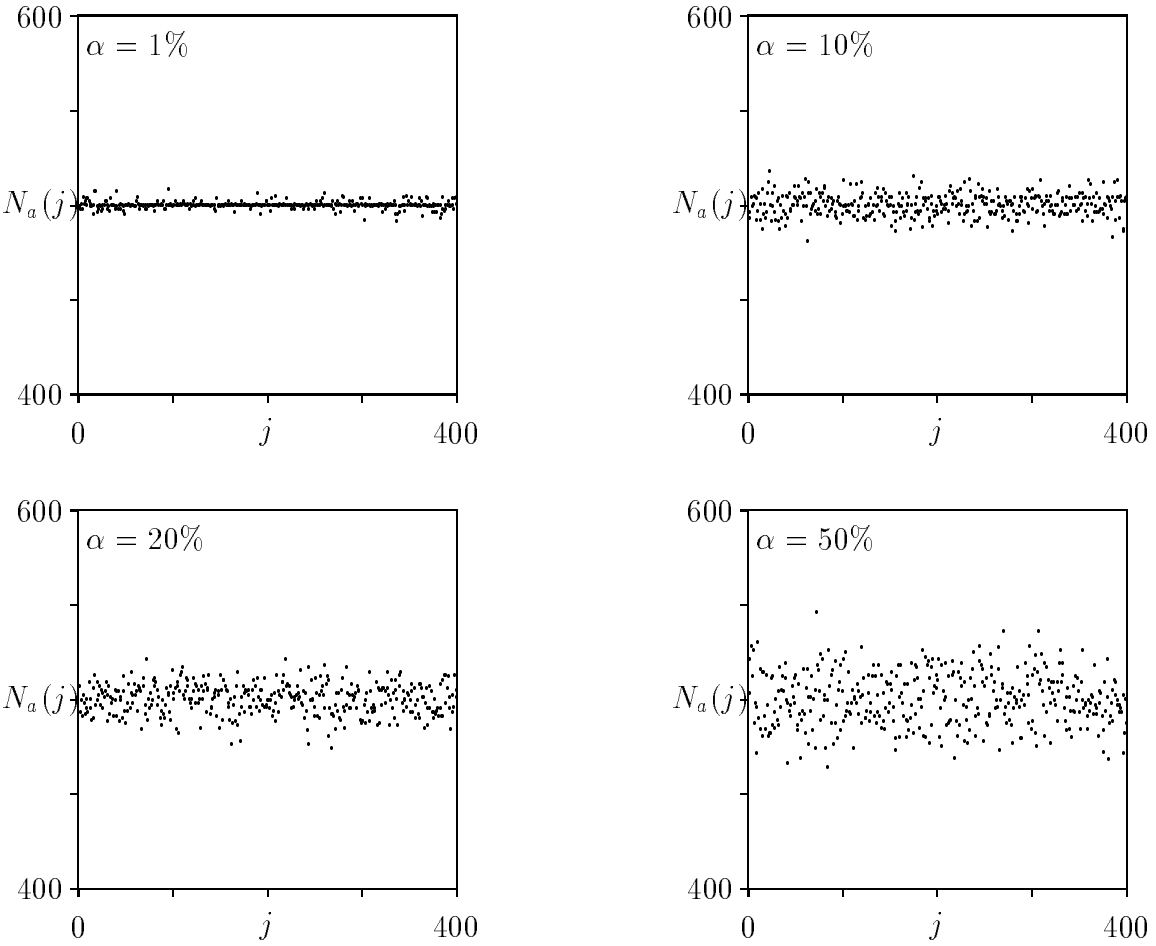

Abbildung 3.3: Zahl der Aufrufe $N_a(j)$ der Zelle j eines Automaten mit 400 Zellen nach 500 Durchläufen mit asynchroner Steuerung mit dem Warteschlangenmodell für vier verschiedene Werte von α

nitäten streut die Zahl der Aufrufe nur in einem kleinen Intervall. Einen Überblick über die Streuung gibt Abb. 3.2.

3.2 Wirkung der Asynchronität auf die Geometrie der Lösung

Die Asynchronität bewirkt, daß Ecken tendenziell abgerundet werden. Das kann man so verstehen (vgl. Abb. 3.4): Durch die Asynchronität können Zellen innerhalb eines Durchlaufs zwei- oder mehrmals bearbeitet werden. Das bewirkt an einer Aktivierungsfront, daß die Zellen, die bei synchroner Steuerung erst im nächsten Durchlauf aktiv werden würden, nun mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit im gleichen

Abbildung 3.4: Zur Veranschaulichung der Wirkung der Asynchronität (aus [Sch90b]).

Durchlauf aktiviert werden. Diese Beschleunigung wirkt sich genau dann aus, wenn sich eine Zelle direkt neben der Front vor eine Zelle drängelt, die zwei Reihen von der Front entfernt ist. Dadurch breitet sich die Front im asynchronen Fall auch etwas schneller aus als im synchronen (vgl. Abb. 3.10). Die Zahl der Front-Nachbar-Zellen, die diese Beschleunigung vermitteln können, ist aber in einer Ecke geringer als an einer geraden Front. Die Ecke bleibt hinter der restlichen Front zurück, wodurch sie verschwindet.

Die Bevorzugung runderer Lösungen soll nun quantifiziert werden. Dazu definiert man ein Maß für die Unrundheit einer Front von Zellen mit dem Zustand z_F für Erregungswellen, die von einem Zentrum (j_0, k_0) ausgehen:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\left(d_{jk}-\overline{d}\right)\delta_{z_{jk},z_F} \qquad (3.3)\\ d_{jk} &= \sqrt{(j-j_0)^2-(k-k_0^2)}\\ \overline{d} &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N_x}\sum_{k=1}^{N_y} d_{jk}\,\delta_{z_{jk},z_F}\\ N &= \sum_{j=1}^{N_x}\sum_{k=1}^{N_y}\delta_{z_{jk},z_F} \end{aligned}$$

Die Ergebnisse für ein Epidemie-Modell zeigt Abb. 3.9. Schon für kleine Asynchronitäten sinkt die Unrundheit deutlich. Sie verschwindet für höhere Asynchronitäten nicht, weil dann die stochastischen Effekte überwiegen und die Front rauher wird. Mithin wird der Abhängigkeit der Lösungsgeometrie von der Gittergeometrie geringer (Abb. 3.7 und 3.8).

3.3 Das Greenberg-Hastings-Modell

Dieses vielseitig einsetzbare Modell [TH88] besteht aus Zellen mit wenigen Zuständen N_z. Ein Zustand davon heißt aktivierbar, einer aktiv, und die anderen refraktär. Ist in der Nachbarschaft einer aktivierbaren Zelle eine aktive Zelle, wird die Zelle im nächsten Zeitschritt selbst aktiv. In den folgenden Zeitschritten durchläuft die Zelle nacheinander alle refraktären Zustände:

$$z_{jk}(t_{i+1}) = \begin{cases} z_{jk}(t) - 1 & \text{wenn } z_{jk}(t) \geq 1 \\ N_z & \text{wenn } z_{jk}(t) = 0 \ \wedge (z_{j\pm 1k}(t) = N_z \ \vee z_{jk\pm 1}(t) = N_z) \\ 0 & \text{wenn } z_{jk}(t) = 0 \text{ keine aktiven Nachbarn hat} \end{cases} \tag{3.4}$$

Hier ist der Zustand mit der Nummer 0 aktivierbar, der mit der Nummer N_z aktiv, und die anderen $\{N_z, N_z - 1, \ldots, 1\}$ refraktär.

Abbildung 3.5: Zustandsdiagramm des Greenberg-Hastings-Modells

Anwendungen dieses Modells findet man u.a. bei

- katalytischer Oxidation von CO an Pt-Oberflächen [MWEE86]
- Waldbrand-Modellen [BCT90]
- Epidemie-Ausbreitungsmodellen [Sch89a]
- Modellen für die BZ-Reaktion [Win74]
- Neuronenaktivitäten [Möl90]

Abbildung 3.6: Bildung von Spiralwellen bei der Belousov-Zhabotinskij-Reaktion (aus [Win74])

Beispiel: ein Epidemie-Modell

Am Beispiel eines Epidemie-Modells mit $N_z = 10$ soll die Wirkung der Asynchronität auf die Geometrie der Lösung veranschaulicht werden. Als Anfangsbedingung wird ein Streifen aktiver Zellen ($N_z = 10$) neben einem Streifen maximal refraktärer Zellen ($N_z = 9$) gewählt. Alle übrigen Zellen sind im aktivierbaren Zustand.

Die Abbildungen 3.7 und 3.8 zeigen die Entwicklung auf einem quadratischen und einem hexagonalen Gitter. Es bilden sich regelmäßige quadratische oder hexagonale Strukturen. Diese offensichtliche Diskrepanz zu den realen Mustern wie in Abb. 3.6 kann durch Verwendung schwach asynchroner Steuerung vermieden werden. Gleichzeitig entstehen weniger glatte Ränder. Der Einfluß der Gittergeometrie ist nun wesentlich schwächer.

Zur Bestimmung der Unrundheit verwendet man eine Anfangsbedingung mit einer einzelnen aktiven Zelle in der linken, unteren Ecke des Feldes. Die Erregung breitet sich nach oben und rechts aus, bis sie schließlich das Zellengebiet verläßt.

Abbildung 3.7: Entwicklung von Epidemien, ausgehend von einer einzelnen aktiven Zelle in der linken unteren Ecke eines quadratischen Gebietes mit Moore-Nachbarschaft. Gezeichnet sind nebeneinander jeweils der Zustände nach 50 Durchläufen (aus [Sch90a]). Die Größe des Punktes in der Mitte der Zelle ist proportional zum Zustandswert z_{jk} der Zelle. Links: $\alpha = 0$. Mitte: $\alpha = 2\%$. Rechts: $\alpha = 20\%$.

Abbildung 3.8: Entwicklung von Epidemien auf einem hexagonalen Gitter, ausgehend von einem Streifen aktiver Zellen neben einem Streifen refraktärer Zellen. Gezeichnet sind nebeneinander jeweils der Zustände nach 28 Durchläufen (aus [Sch90a]). Links: $\alpha = 0$. Mitte: $\alpha = 2\%$. Rechts: $\alpha = 20\%$.

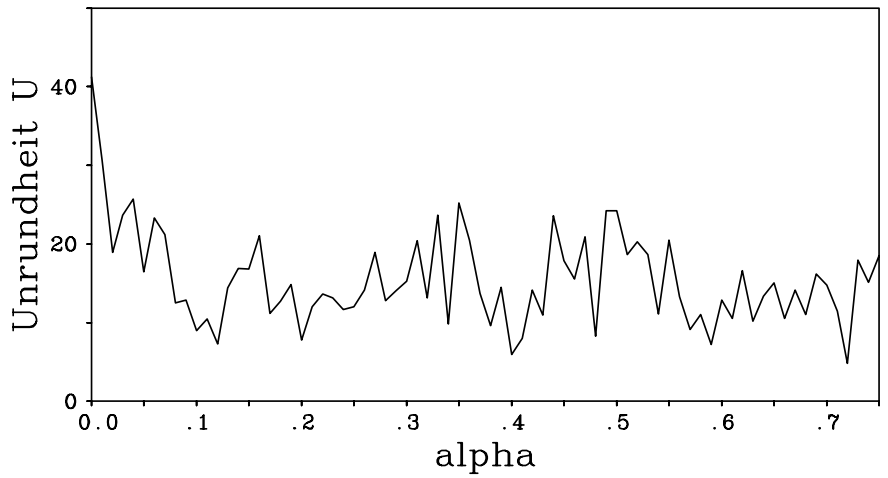

Abbildung 3.9: Unrundheit U (3.3) der Front der aktiven Zellen in einem Epidemie-Modell mit $N_z = 10$ als Funktion der Asynchronität α

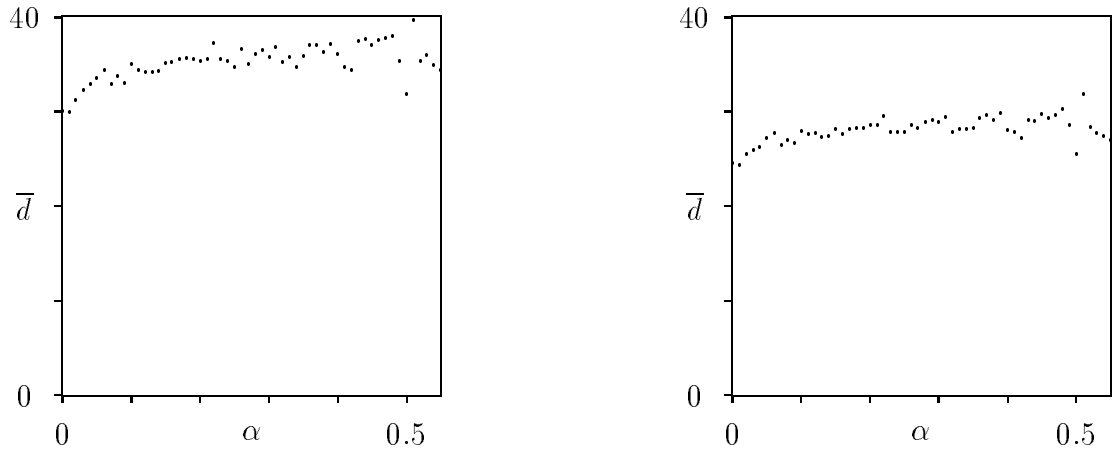

Abbildung 3.10: Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Aktivierungsfront beim Epidemie-Modell mit $N_z = 10$ als Funktion der Asynchronität α. Gestartet wurde mit einer punktförmigen Erregung in linken unteren Ecke $(j_0, k_0) = (0, 0)$ eines quadratischen 60×60-Feldes. Aufgetragen ist jeweils der mittlere Abstand $\overline{d}$ der aktiven Zellen ($z_{jk} = N_z$) von der Mitte des Feldes nach 30 Durchläufen. Im linken Bild wurde der Abstand einer Zelle von der Mitte mit der euklidischen Norm $d_{jk} = \sqrt{(j - j_0)^2 + (k - k_0)^2}$ berechnet, im rechten Bild mit der 1-Norm $d_{jk} = |j - j_0| + |k - k_0|$

3.4 Modellierung von Erosion mit dem Schulz-Modell

Der Einsatz der asynchronen Simulation ist dann besonders effektiv, wenn ein zellulärer Automat vorliegt, dessen Regeln aus der Anschauung für ein quadratisches Gitter abgeleitet wurden und der nun eine gitterunabhängige Lösungsgeometrie zeigen soll. Genau dieses Problem tauchte bei der Simulation der Entstehung dendritischer Flußstrukturen auf [SKL90]. Das reale Experiment wurde in unserer Gruppe durchgeführt [WKHL91]. Es handelte sich dabei um einen runden Sandtrog mit einem zentralen Abfluß. Die Sandoberfläche wurde am Rand gleichmäßig bewässert.

Modelliert werden im wesentlichen die folgenden zwei Effekte:

- der Abfluß von Wasser
- das Mitreißen von Sandkörnern durch Wasser

Dazu dienen folgenden Automatenregeln für die inneren Zellen[1] eines zellulären Automaten auf einem quadratischen Gitter mit Moore-Nachbarschaft:

$$
\begin{aligned}
z_{jk}(t_i) &= (W_{jk}(t_i), S_{jk}(t_i)) \\
W_{jk}(t_{i+1}) &= \begin{cases} W_{jk}(t_i) & \text{falls} \quad U_S = \emptyset \wedge U_W = \emptyset \\ 0 & \text{falls} \quad U_S \neq \emptyset \\ \frac{1}{2}\left(W_{U_W}(t_i) + W_{jk}(t_i)\right) & \text{falls} \quad U_S = \emptyset \wedge U_W \neq \emptyset \end{cases} \\
S_{jk}(t_{i+1}) &= \begin{cases} S_{jk}(t_i) - 1 & \text{falls} \quad U_S \neq \emptyset \wedge \text{ZUF} \\ S_{jk}(t_i) & \text{sonst} \end{cases} \\
&\text{wenn} \quad U_S \neq \emptyset, \text{ dann:} \\
W_{U_S}(t_{i+1}) &= \frac{1}{2}\left(W_{U_S}(t_i) + W_{jk}(t_i)\right) \\
&\text{wenn} \quad U_S = \emptyset \wedge U_W \neq \emptyset, \text{ dann:} \\
W_{U_W}(t_{i+1}) &= \frac{1}{2}\left(W_{U_W}(t_i) + W_{jk}(t_i)\right)
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Dabei ist W_{jk} der Wasserstand in der Zelle jk, S_{jk} die Sandhöhe, U_S die ausgedünnte Menge der Nachbarn mit den niedrigsten Sandpegeln und U_W die ausgedünnte Menge der Nachbarn mit den niedrigsten Wasserständen. Befindet sich in den Mengen mehr als ein Element, wird zufällig eines ausgewählt. Die Mengen werden ausgedünnt, indem nur die Zellen mit dem niedrigsten Pegel in der Menge bleiben. Davon wird ein Element zufällig ausgewählt, wenn mehrere Nachbarzellen den gleichen niedrigen Pegelstand haben. ZUF ist ein Zufallsereignis, dessen Eintrittswahrscheinlichkeit zum aktuellen Pegelstand $W_{jk}(t_i)$ proportional ist.

Eine bildliche Veranschaulichung der Automatenregeln zeigt Abb. 3.11.

[1] Die Randzellen können extra beregnet werden. Darauf soll aber hier nicht eingegangen werden.

Abbildung 3.11: Bildliche, einfache Darstellung der Automatenregeln (3.5) des Schulz-Modells (aus [Sch90b])

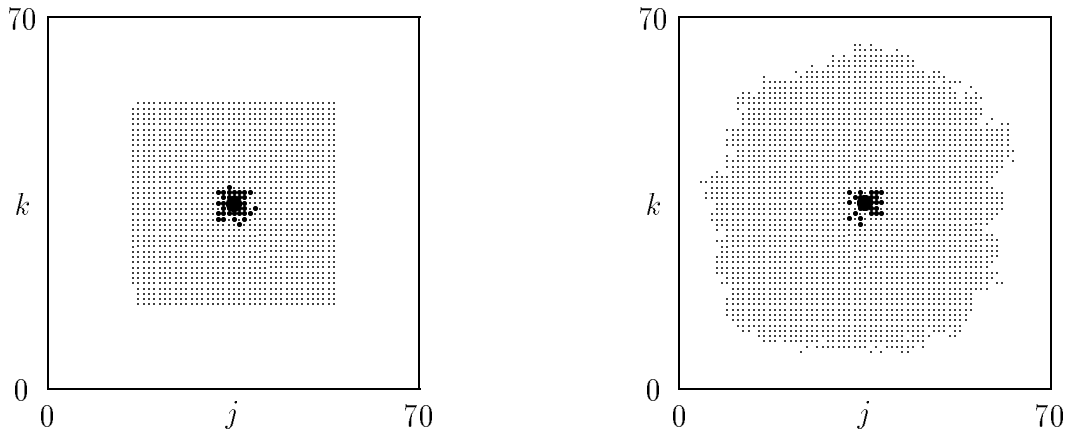

Abbildung 3.12: Simulation der Erosion einer Sandschicht in einem Trog mit zentralem Abfluß durch das darüber geschichtete, schnell abfließende Wasser mit einem Zellularautomaten (3.5). Die Punktgröße gibt das Höhenniveau an. Links: synchrone Simulation. Rechts: asynchrone Simulation mit $\alpha = 50\%$. Daten wie in ([Sch90b, S.65]), jedoch mit einem LaTeX-Plot-Programm aufbereitet.

Dieser Automat ist in dieser Formulierung bereits stochastischer Natur. Für bestimmte Parameterwerte (hohe Abflußrate) spielt dieser Einfluß jedoch eine geringe Rolle, so daß sich die Erosionsfront ähnlich wie die Erregungsfront im Greenberg-Hastings-Modell ausbreitet. Die entstehenden Strukturen zeigt Abb. 3.12. Die unrealistischen Gittereffekte werden durch Einführung einer Asynchronität von 50% vermieden.