Kapitel 2

Ermittlung von Abbildungen aus Differentialgleichungen

Zeitdiskrete Modelle sind Abbildungen, die einen Systemzustand zu einer bestimmten Zeit auf den Systemzustand zu einer späteren Zeit abbilden. Dabei sollen die Zeitschritte weder infinitesimal klein sein wie bei einer Differentialgleichung, noch können sie beliebig groß gewählt werden. Bei chaotischen Systemen sind Vorhersagen sinnlos sind, die sich über einen Zeitraum erstrecken, der die Vorhersagedauer $T_{\max}$ überschreitet. $T_{\max}$ kann man dabei aus der Kolmogorov-Entropie K berechnen [Far82]:

$$T_{\max} \sim \frac{1}{K} \log \left(\frac{1}{\Delta x_0} \right) \tag{2.1}$$

Dabei ist Δx_0 die Unsicherheit in den Anfangsbedingungen, die nur logarithmisch in $T_{\max}$ eingeht. Eine Verbesserung der Meßgenauigkeit wirkt sich also nur schwach auf den möglichen Vorhersagezeitraum aus. Für Systeme mit ortsunabhängigen Lyapunov-Exponenten ergibt sich K einfach als Summe der positiven Lyapunov-Exponenten. Diese wiederum lassen sich numerisch aus einer Differentialgleichung bestimmen [LKP87]. Die Berechnung kostet sehr viel Rechenzeit, wenn die Lyapunov-Exponenten durch numerische Integration aus Differentialgleichungen bestimmt werden müssen. Lyapunov-Exponenten lassen sich wesentlich schneller für Abbildungen bestimmen, weil dort die Integrationsarbeit entfällt.

Die leichtere Auswertbarkeit diskreter Modelle ist einer der wesentlichen Vorteile von diskreten Modellen. Es sollen jetzt Abbildungen definiert werden, die sich für die Repräsentation der Dynamik nichtlinearer Differentialgleichungen eignen, und sodann Methoden zu ihrer Berechnung aus gegebenen Differentialgleichungen gezeigt werden.

2.1 Definition geeigneter Abbildungen

Gegeben sei ein dynamisches System in Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, t), \quad \vec{x} \in I\!R^m \tag{2.2}$$

Ist $\vec{F}$ nicht explizit zeitabhängig, heißt das System autonom. Nicht-autonome Systeme lassen sich durch Einführung einer weiteren Zustandsvariablen x_{m+1} mit $dx_{m+1}/dt = 1$ und der Ersetzung $\vec{F}(\vec{x}, t) \to \vec{F}(\vec{x}, x_{m+1}) \to \vec{F}(\vec{y}),\ y \in I\!R^{m+1}$ auch als autonomes System schreiben.

Gesucht ist eine Abbildung $\vec{S} : \vec{x}(t_0) \to \vec{x}\,(t_0 + T\,(\vec{x}(t_0)))$, die einen Systemzustand zu einer Zeit t_0 auf den Systemzustand zur späteren Zeit $t_0 + T$ abbildet. Die Frage ist, wie T von $\vec{x}(t_0)$ abhängen soll, damit $\vec{S}$ ein möglichst effektives Modell für die Dynamik des nichtlinearen Systems ist.

Effektiv ist das Modell dann, wenn es leicht numerisch oder analytisch studierbar ist. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn einige Komponenten der Abbildung trivial werden, womit sich die Zahl der zur Beschreibung notwendigen Dimensionen vermindert.

2.1.1 Die stroboskopische Abbildung

Abbildung 2.1: Zum Prinzip der stroboskopischen Abbildung

Falls F periodisch mit $\hat{T}$ von der Zeit abhängt, bietet es sich an, $T = \hat{T} = \text{const.}$ zu wählen. Das System wird damit periodisch „beleuchtet“, weshalb man diese Abbildung auch stroboskopische Abbildung nennt.

Die stroboskopische Abbildung, die sich aus (2.2) ergibt, ist autonom und m-dimensional. Sie enthält sämtliche zeitliche Information, da T bekannt ist: Die i-te Iteration einer stroboskopischen Abbildung liefert den Systemzustand zur Zeit $t_0 + i \cdot T$.

2.1.2 Poincaré-Abbildungen

Stroboskopische Abbildungen lassen sich zwar relativ gut berechnen, sind aber nicht die effektivste Methode zur Beschreibung autonomer Systeme ohne feste Eigenfrequenz.

Im folgenden betrachten wir Zustände $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{X}$, wobei $\mathcal{X}$ das physikalisch relevante Gebiet des Zustandsraums ist.

Abbildung 2.2: Zum Prinzip der Poincaré-Abbildung. Die Abbildung P bildet den Durchtoßpunkt $\vec{q}$ auf den nächsten Durchstoßpunkt $P(\vec{q})$ ab.

Man definiert nun eine Hyperfläche $\Sigma : \sigma(\vec{x}) = 0$, die immer transversal zu $\vec{F}(\vec{x})$ steht, für deren Normalenvektor $\vec{n}$ also gilt: $\vec{n}\vec{F}(\vec{x}) \neq 0 \;\; \forall \vec{x} \in \mathcal{X}$. Die Schnittpunkte $\vec{q}$ der Trajektorien mit Σ bilden einen sog. Poincaré-Schnitt des Systems (Abb. 2.2).

Wählt man nur Schnittpunkte, bei denen die Trajektorie die Hyperfläche in einer bestimmten Richtung durchstößt, erhält man einen einseitigen Poincaré-Schnitt. Diese Variante wird meistens verwendet.

Die Poincaré-Abbildung

$$P : \vec{q}_i \rightarrow \vec{q}_{i+1}, \qquad \vec{q}_i, \vec{q}_{i+1} \in \Sigma \tag{2.3}$$

des Systems ist die Dynamik der Punkte des Poincaré-Schnitts, also die Abbildung, die den nächsten Schnittpunkt als Funktion des vorigen angibt. Durch die Wahl der Poincaré-Fläche, also die Festlegung einer Variablen, reduziert sich die Dimension der Abbildung um eins auf $m - 1$.

Bei den meisten Systemen lassen sich zusätzliche Korrelationen zwischen den verbleibenden Variablen angeben. Bei konservativen Systemen oder Teilsystemen geschieht dies über die Ausnutzung der Erhaltungsgrößen. Bei dissipativen Systemen wird das Phasenraumvolumen oft derart stark kontrahiert, daß die Dimension des Attraktors nur unwesentlich über $m-1$ liegt, die des Poincaré-Schnitts damit nur unwesentlich über $m-2$. Auf dem Attraktor läßt sich damit in guter Approximation eine weitere Variable eliminieren.

Somit lassen sich auch für chaotische Systeme (deren kontinuierliche Darstellung ja mindestens dreidimensional sein muß [GH83, S.44f.]) eindimensionale Poincaré-Abbildungen angeben. Dabei ist das Hauptproblem die Umrechnung der Kontrollparameter des kontinuierlichen Systems in die Parameter der Abbildung.

2.1.3 Next-Maxima-Abbildungen, Next-Extrema-Abbildungen

Abbildung 2.3: Zeitreihe (links), Next-Maxima-Abbildung (mitte) und Next-Extrema-Abbildung (rechts) des Rössler-Systems für $\mu = 4.5$

Eine Next-Maxima-Abbildung (Next-Extrema-Abbildung) ist eine Funktion, die — wenigstens näherungsweise — einen Maximalwert (Extremwert) einer Variablen eines dynamischen Systems auf den nächsten Maximalwert (Extremwert) derselben Variablen abbildet. Die Existenz einer solchen Abbildung ist im allgemeinen Fall nicht sichergestellt. Auf jeden Fall existiert eine Next-Maxima- bzw. Next-Extrema-Relation

$$\mathcal{R} : \{(u,v) | u = \hat{x}_i, v = \hat{x}_{i+1}, i \in I\!N\} \tag{2.4}$$

wobei $\hat{x}_i$ der i-te Extremwert der Zustandsvariablen x sei.

Für viele nichtlineare Systeme existieren gute Approximationen von Next-Maxima- oder Next-Extrema-Abbildungen durch Polynome oder andere glatte Funktionen. In diesen Fällen lassen sich einige Eigenschaften der Dynamik dieser Systeme sehr leicht mit Hilfe dieser Abbildungen untersuchen, weil diese definitionsgemäß immer *eindimensional* sind. Die analytische Berechnung solcher Approximationen ist im allgemeinen Fall sehr schwierig.

Für Differentialgleichungen zweiter Ordnung $\ddot{z} + F(z, \dot{z}) = 0$ sind Next-Maxima-Abbildungen identisch zu einer Poincaré-Abbildung mit der Poincaré-Ebene $\dot{z} = 0$. Dies kann man folgendermaßen verstehen:

Durch die Substitutionen $x_1 := z$ und $x_2 := \dot{z}$ ergibt sich das zweidimensionale System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -F(x_1, x_2)\end{aligned}$$

Als Poincaré-Schnitt verwendet man nun diejenigen Teile der x_1-Achse, für die gilt $F(x_1, 0) > 0$, also gerade die Maxima von x_1. Die Next-Extrema-Abbildung ist der zweiseitige Poincaré-Schnitt, also der Schnitt mit der gesamten x_1-Achse.

2.1.4 Übersicht über diskrete Abbildungen für dynamische Systeme

	stroboskopische Abbildung	Poincaré-Abbildung	Next-Maxima-Abbildung
Dimension	N	$N-1$	1
analyt. Berechenbarkeit	gut	mittel	schlecht
Invertierbarkeit	ja	ja	im allgemeinen nicht

Tabelle 2.1: Vergleich verschieden definierter Abbildungen als Modelle für die komplexe Dynamik nichtlinearer N-dimensionaler Differentialgleichungen

2.2 Ermittlung stroboskopischer Abbildungen

Die Verfahren zur Berechnung von Poincaré-Abbildungen (Kapitel 2.3) basieren auf Verfahren zur Berechnung von stroboskopischen Abbildungen. Deshalb sollen in den Abschnitten 2.2.2 bis 2.2.4 drei Verfahren vorgestellt werden, mit denen sich letztere aus gegebenen Differentialgleichungen berechnen lassen. Allen drei Verfahren ist gemeinsam, daß sie einen analytischen Näherungsausdruck für die stroboskopische Abbildung des Systems liefern, in dem die Abhängigkeit der Parameter der Abbildung von den Kontrollparametern des Systems ersichtlich ist. Das zweite und dritte Verfahren läßt sich momentan nur auf Differentialgleichungen anwenden, deren Flußvektorfeld sich als Polynom schreiben läßt. Eine Erweiterung auf allgemeinere Flußvektorfelder ist aber denkbar.

2.2.1 Beschränkung auf das physikalisch relevante Gebiet

Gegeben sei eine Differentialgleichung

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, t, \vec{p}), \quad \vec{x} \in I\!R^m, \quad \vec{p} \in I\!R^n \tag{2.5}$$

mit m Zustandsvariablen und n Kontrollparametern. Zur Berechnung der stroboskopischen Abbildung eignet sich ein Ansatz jeder Komponente als Potenzreihe:

$$S_k\left(\vec{\xi}, \vec{p}, t_0, T\right) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m = 0}^{\infty} c_{k; i_1, i_2, \ldots, i_m}(\vec{p}, t_0, T) \prod_{j=1}^{m} \xi_j^{\, i_j} \tag{2.6}$$

Dabei ist $\vec{\xi} = \vec{x}(t = t_0)$ der Vektor der Anfangsbedingungen.

Um die Konvergenz der Potenzreihen besser untersuchen zu können, transformiert man das physikalisch interessierende Gebiet der Anfangsbedingungen und Kontrollparameter auf das Intervall $[-1, 1]$.

Eine kompaktere Schreibweise erhält man, wenn man die Kontrollparameter wie Zustandsvariablen behandelt, deren zeitliche Ableitung verschwindet. Damit ergibt sich als transformierte Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{y}} &= \vec{G}(\vec{y}, t), \vec{y} \in I\!R^{m+n} \qquad \text{mit} \\
G_i(\vec{y}, t) &= \begin{cases} \frac{2}{b_i - a_i} f_i(\vec{u}, t) & \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ 0 & \text{für} \quad i = m+1, m+2, \ldots, m+n \end{cases} \qquad \text{und} \\
u_j &= (b_j + a_j)/2 + y_j(b_j - a_j)/2, \quad i = 1, 2, \ldots, m+n
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Dabei sind die a_j und b_j die unteren und oberen Grenzen des physikalisch interessierenden Bereiches für die Zustandsvariable x_j bzw. den Kontrollparameter p_{j-m}.

Um den interessierenden Bereich noch besser durch diesen Hyperquader eingrenzen zu können, ist manchmal noch eine Drehung der Koordinaten erforderlich (siehe Beispiel auf Seite 20).

Im folgenden wird davon ausgegangen, daß man die Grenzen a_j und b_j kennt (etwa aus numerischen Simulationen oder experimentellen Daten), und daß man das Differentialgleichungssystem gemäß (2.7) transformiert hat.

2.2.2 Numerisch-approximierende Methode

In den Hyperwürfel für die Anfangsbedingungen $\vec{\eta} = \vec{y}(t = t_0)$ läßt sich ein Gitter legen. Von jedem Gitterpunkt $\vec{\eta}_k$ startet man eine numerische Integration von $t = t_0$ bis $t = t_0 + T$. Das Problem, einen analytischen Näherungsausdruck für die Stroboskopabbildung (2.6) zu bekommen, reduziert sich jetzt auf die Approximation der erhaltenen Werte $\vec{S}(\vec{\eta}_k, t_0, T)$ durch glatte Funktionen [EKH+87], [KEHL88].

Dazu eignen sich insbesondere orthogonale Polynome wie die Tschebyscheff-Polynome und die Legendre-Polynome [BD79, S.91], [BS89, Kap.7.1.2.5], wobei die Tschebyscheff-Polynome auf die Minimierung der maximalen Abweichung abzielen, die Legendre-Polynome hingegen auf die Minimierung der mittleren quadratischen Abweichung. Der erste der beiden Approximationsansätze soll kurz dargestellt werden.

Tschebyscheff-Approximation (Bestapproximation)

Die sog. Bestapproximation liefert folgenden Näherungsausdruck für eine eindimensionale Funktion $f(x), x \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \left(\sum_{j=1}^{r} c_j T_{j-1}(x)\right) - \frac{1}{2}c_1 \quad \text{mit} \qquad (2.8) \\ T_j(x) &= \cos(j \arccos x) \quad \text{und} \\ c_j &= \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x_k) T_{j-1}(x_k) \\ &= \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x_k) \cos\left(\frac{\pi(j-1)(k-\frac{1}{2})}{N}\right) \end{aligned}$$

Dabei sind als Abszissenwerte die sog. Tschebyscheff-Abszissen

$$x_k = \cos\frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi}{N}, \quad k = 1, 2, \ldots, N \qquad (2.9)$$

zu wählen. Der maximale Fehler ist hierbei kleiner als der dreifache maximale Fehler des sog. *Minimax*-Polynoms. Dieses Polynom stellt die optimale Approximation dar, ist aber sehr schwer auffindbar. Die Tschebyscheff-Approximation ist fast gleichwertig, aber wesentlich leichter zu bestimmen [PFTV86, S.149].

Anwendung zur Bestimmung einer zweidimensionalen Iterationsfunktion für den Helmholtz-Oszillator

Untersucht wurde zunächst ein Helmholtz-Oszillator in einem Koordinatensystem, das keine speziellen Symmetrien besitzt.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\mu x_2 - 0.65 x_1 + x_1^2 - 0.36667 + F(t) \\ F(t) &= -0.835 \cos(\omega t) \end{aligned} \tag{2.10}$$

$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ist der Zustandsvektor, μ die Reibungskonstante, und $\omega = 0.806$ die Kreisfrequenz des Antriebs. Die Verschiebung um 0.36667 bewirkt nur eine Verlagerung des Attraktorschwerpunktes in die Nähe des Ursprungs.

Nachdem das Gebiet numerisch bestimmt wurde, das vom Attraktor der Schwingung mehr oder weniger dicht ausgefüllt wird, wurde eine Koordinatentransformation

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.8 \\ 0.8 & -0.8 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.15 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

vorgenommen, bei der eine zusätzliche Drehung bewirkt, daß diejenigen Gebiete des Phasenraums ausgeblendet werden, die zum Einzugsbereich des Attraktors bei $-\infty$ gehören.

Die stroboskopische Abbildung $\vec{S}(\vec{\eta}, 0, 2\pi/\omega)$ wurde an 11×11 Punkten des Gebietes $\{\vec{\eta} \mid -1 \leq \eta_1 \leq 1 \ \wedge -1 \ \leq \eta_2 \leq 1\}$ numerisch bestimmt und durch ein Polynom vom Grad (3,3) approximiert (Tabelle 2.2). Die maximale Abweichung dieser approximierten Abbildung $\vec{S}_a$ vom rein numerischen Ergebnis $\vec{S}_n$ ist verhältnismäßig klein, z.B. gilt für $T_0 = 2\pi/\omega$:

$$\Delta s = \max \frac{|\underline{S}_n(\underline{z}, 0, T_0) - \underline{S}_n(\underline{z}, 0, T_0)|}{s} < 4 \cdot 10^{-2} \tag{2.12}$$

mit

$$s = \frac{\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} |S_n(\vec{\eta}, 0, T_0)| d\eta_1 d\eta_2}{\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} d\eta_1 d\eta_2}$$

$S_1(x_1,x_2,T_0)$	$=$	$-0.333+0.488x_2+0.086x_2^2-0.035x_2^3$
		$-0.425x_1-0.728x_1x_2-0.464x_1x_2^2-0.108x_1x_2^3$
		$-0.166x_1^2-0.014x_1^2x_2+0.261x_1^2x_2^2+0.184x_1^2x_2^3$
		$+0.611x_1^3+0.21x_1^3x_2+0.097x_1^3x_2^2-0.028x_1^3x_2^3$
$S_2(x_1,x_2,T_0)$	$=$	$1.043+0.231x_2-0.052x_2^2-0.022x_2^3$
		$-0.201x_1-0.182x_1x_2-0.006x_1x_2^2+0.028x_1x_2^3$
		$-0.2x_1^2-0.108x_1^2x_2-0.055x_1^2x_2^2-0.046x_1^2x_2^3$
		$-0.088x_1^3-0.032x_1^3x_2+0.008x_1^3x_2^2+0.026x_1^3x_2^3$

Tabelle 2.2: Stroboskopische Abbildung für den Helmholtz-Oszillator (2.10)

Bei Verwendung von Polynomen vom Grad (5,5) sinkt der maximale Fehler auf $\Delta s < 1.5\cdot 10^{-3}$. Die chaotische Dynamik, die mit der approximierten Abbildung erhalten wird, stimmt gut mit den numerischen Ergebnissen überein, wie der Poincaré-Schnitt in Abb. 2.4 zeigt. Die numerische Integration [IMS84] über 1000 Oszillationen von $F(t)$ benötigte 6 CPU-sec auf einer CYBER 975, während für die Berechnung der approximierten Stroboskop-Abbildung inklusive einer 1000-maligen Iteration nur 0.88 CPU-sec benötigt wurden.

Die offensichtliche Korrelation von x_1 und x_2 läßt sich ausnützen, um von der angegebenen zweidimensionalen Iterationsfunktion zu einer eindimensionalen zu gelangen [KEHL92].

2.2.3 Iterativ-approximierende Methode

Eine Alternative zur numerischen Integration an vielen Gitterpunkten ist die analytische Durchführung numerischer Verfahren mit Hilfe von Computer-Algebra [EKH+87, EHML87].

Als Beispiel soll hier das Euler-Verfahren betrachtet werden; andere Verfahren wie das Runge-Kutta-Vefahren lassen sich jedoch problemlos in die Programme einbauen. Das Prinzip wird beim Euler-Verfahren deutlicher.

Der Zeitschritt T, über den integriert werden soll, wird aufgeteilt in N_e Schritte der Größe $h = T/N_e$. Wenn N_e genügend groß ist, läßt sich der Differentialquotient in (2.7) in einen Differenzenquotienten umschreiben:

$$\dot{\vec{y}} \approx \frac{y(t+h)-y(t)}{h} = \vec{G}(\vec{y},t) \tag{2.13}$$

Abbildung 2.4: Poincaré-Schnitt des Helmholtz-Oszillators (2.10) mit (2.11) für $\mu = 0.97$. Links: numerische Berechnung [IMS84]. Rechts: Berechnung mit einer zweidimensionalen Iterationsfunktion vom Grad (5,5)

Damit ergibt sich eine Iterationsvorschrift, die nun N_e mal hintereinander angewendet werden muß:

$$y(t+h) = y(t) + h \cdot \vec{G}(\vec{y}, t) \tag{2.14}$$

Ausgehend von $\vec{\eta} = \vec{y}(t = t_0)$ erhält man als Ergebnis die stroboskopische Abbildung $\vec{S}(\vec{\eta}, t_0, T)$.

Wenn die Funktion G nichtlinear ist, wächst der Grad des Polynoms für $y(t+h)$ exponentiell mit jeder Iteration an. Die einfachste Möglichkeit, diesem Problem zu begegnen, nämlich das Weglassen aller Potenzen über einem bestimmten Grad, hat beträchtliche Abweichungen zur Folge [Bes84].

Approximiert man stattdessen nach jedem Schritt (vgl. Abb. 2.5) das erhaltene Polynom durch eine Summe orthogonaler Polynome bis zu einem vorgegebenen Grad $\vec{r}$

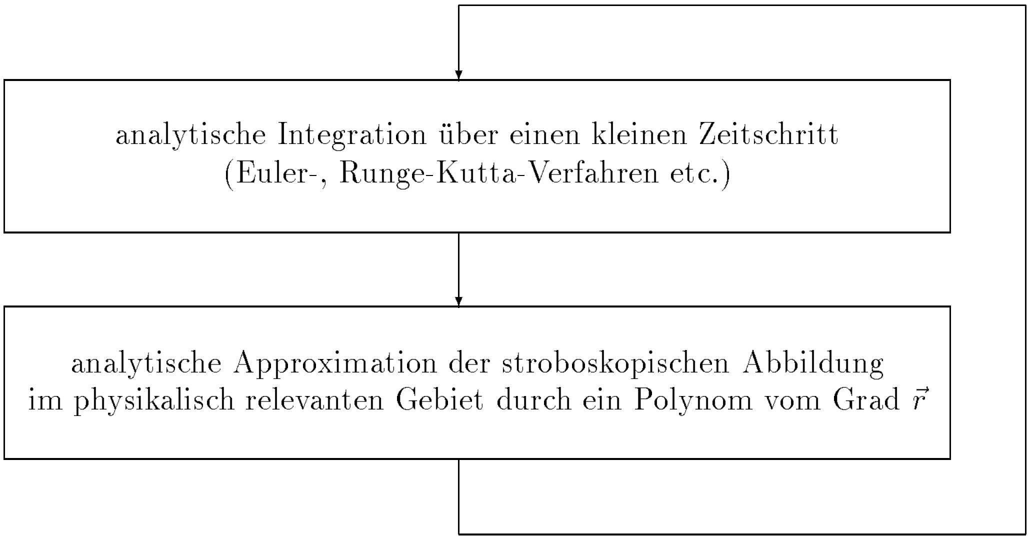

Abbildung 2.5: Schema zur iterativ-approximativen Berechnung einer analytischen Darstellung der Stroboskopabbildung einer gewöhnlichen, nichtlinearen Differentialgleichung

in den Anfangsbedingungen [1], bleibt der zusätzliche Verfahrensfehler in den meisten Fällen vernachlässigbar klein. Erst wenn die Stroboskopabbildung selbst so kompliziert wird, daß sie sich nicht mehr durch ein Polynom niedriger Ordnung beschreiben läßt, versagt auch dieses Verfahren. Während des Programmlaufes kann man dieses Versagen daran erkennen, daß die Koeffizienten der Terme höheren Grades plötzlich groß werden.

2.2.4 Analytische Lösung der Koeffizientendynamik

In Abb. 2.7 ist die Entwicklung der Koeffizienten der stroboskopischen Abbildung für den van der Pol-Oszillator über der Stroboskopierzeit T dargestellt. Wie man deutlich sieht, ist die Dynamik glatt. Es ist nun naheliegend, zu versuchen, die Dynamik der Koeffizienten direkt aus der Differentialgleichung zu berechnen. In der Tat führt das Einsetzen eines Polynomansatzes (2.6) in (2.2) zu einem analytisch lösbaren System für die Koeffizienten $c_{k;i_1,i_2,\ldots,i_m}(\vec{p}, t_0, T)$ [WEHL88].

Prinzipiell lassen sich durch die Lösung dieses Differentialgleichungssystems alle Koeffizienten berechnen, die für eine Approximation der stroboskopischen Abbildung bis zu einer vorgegebenen Genauigkeit notwendig sind. Die Berechnung von Koeffizienten höherer Ordnung ist jedoch sehr mühsam. Es zeigt sich jedoch, daß ausreichend gute Ergebnisse erzielt werden können, wenn man nur bestimmte nichtlineare Koeffizienten berechnet, die sog. wichtigen Moden. Dabei handelt es sich um diejenigen

[1]gemeint ist: Grad r_1 in η_1, Grad r_2 in η_2, etc.

Abbildung 2.6: Trajektorien eines van der Pol-Oszillators $\dot{x}_1 = x_2$; $\dot{x}_2 = \varepsilon(0.25 - 2{x_1}^2)x_2 - x_1$. Durchgezogene Linie: Integration mit einem Runge-Kutta-Verfahren. Gestrichelte Linie: Verbindungslinie zwischen aufeinanderfolgenden Zuständen, berechnet von einer approximierten Stroboskopabbildung mit $T = 0.25$) mit $\vec{r} = (3,3)$ für $\epsilon = 0.5$ (**a**) bzw. $\vec{r} = (10,10)$ für $\epsilon = 3$ (**b**)

Nummer der Kurve im Bild	1	2	3	4
Indizes i_1, i_2	1,0	0,1	2,1	1,2

Abbildung 2.7: Dynamik der Koeffizienten der ersten (links) und zweiten (rechts) Komponente der stroboskopischen Abbildung für den van der Pol-Oszillator (1.1) für $\epsilon = 0.3$. Gezeichnet sind alle Koeffizienten $c_{k;i_1,i_2}(\epsilon = 0.3, t_0 = 0, T)$ der Polynom-Entwicklung (2.6) mit $i_1 = 0, 1, 2, 3$ und $i_2 = 0, 1, 2, 3$ als Funktion von T.

Koeffizienten, deren Indexvektor auch Indexvektor eines Termes im Flußvektorfeld ist. Um eine weitere Genauigkeitssteigerung zu erreichen, kann man anstatt der Berechnung weiterer Koeffizienten auch den Restterm abschätzen, der beim Einsetzen einer Entwicklung der Stroboskop-Abbildung bis inklusive der wichtigen Moden in die Differentialgleichung übrigbleibt [WHMK92].

Die beschriebene Methode ist erweiterbar, um aus partiellen Differentialgleichungen stroboskopische Operatoren analytisch zu ermitteln [REL89, Rüc89].

Abschließende Bemerkung zur Berechnung stroboskopischer Abbildungen

Die Abschnitte 2.2.2 bis 2.2.4 zeigten drei Methoden, die die Berechnung der Koeffizienten von Polynomentwicklungen zulassen. Die entscheidende Annahme, daß die stroboskopische Abbildung sich überhaupt mit einer Potenzreihe mit wenigen nichtverschwindenden Koeffizienten approximieren läßt, wird durch den Erfolg der Methode bei klassischen Testsystemen wie dem Helmholtz- oder dem van der Pol-Oszillator gestützt.

2.3 Berechnung von Poincaré-Abbildungen durch Normalzeittransformationen

2.3.1 Ermittlung der Winkelgeschwindigkeit einer Trajektorie

Stroboskopische Abbildungen sind ihrer Natur nach gut geeignet für Systeme, die einen festen Zeittakt besitzen. Dazu gehören sowohl angetriebene Systeme (Helmholtz-, Duffing-Oszillator), als auch Systeme mit konstanter Oszillationsdauer, wie etwa der von Guckenheimer und Holmes [GH83, S.23] angegebene Oszillator:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y - x(x^2 + y^2) \\ x + y - y(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

Für dieses System läßt sich leicht sowohl eine stroboskopische als auch eine Poincaré-Abbildung berechnen, indem man (2.15) auf Polarkoordinaten (r, Θ) transformiert [SK89]:

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\Theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(1 - r^2) \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

Die stroboskopische Abbildung ergibt sich zu:

$$S_\rho(\rho_0, \Theta_0, T) = \left(1 + (\frac{1}{\rho^2} - 1)e^{-2t}\right)^{-1/2} \tag{2.17}$$

$$S_\Theta(\rho_0, \Theta_0, T) = (T + \Theta_0) \bmod 2\pi \tag{2.18}$$

Abbildung 2.8: Numerisch berechnete stroboskopische Abbildungen für den van der Pol-artigen Oszillator (2.20) für $T = 0.67 \cdot 2\pi$. Diese Wahl von T entpricht etwa einem Umlauf auf dem Grenzzyklus.

Wählen wir als Poincaré-Schnitt $(x > 0, y = 0)$ bzw. $\Theta = 0$, so ist die Wiederkehrzeit konstant 2π, und die Poincaré-Abbildung lautet:

$$P(\rho_0) = \left(1 + (\frac{1}{{\rho_0}^2} - 1)e^{-4\pi}\right)^{-1/2} \tag{2.19}$$

Offensichtlich hat (2.19) einen Fixpunkt bei $\rho_0 = 1$. Dies entspricht dem Grenzzyklus des zugehörigen kontinuierlichen Systems (2.15). Deutlich sieht man hier den Nutzen der Poincaré-Abbildung: Die komplizierte Analyse eines Grenzzyklus reduziert sich auf die Analyse eines Fixpunkts einer Abbildung.

Das System (2.15) wurde offensichtlich so konstruiert, daß die Winkelgeschwindigkeit der Oszillation um den Ursprung der (x_1, x_2)-Ebene konstant ist. Dies ist untypisch für nichtlineare Systeme. Vielmehr ist die Amplituden-Frequenzkopplung einer der wesentlichen und typischen Effekte der Nichtlinearität der Differentialgleichung [NM79, S.54].

Dieser Effekt führt auch dazu, daß stroboskopische Abbildungen für autonome, stark nichtlineare Systeme sich extrem schlecht durch Potenzreihen niedriger Ordnung approximieren lassen. Als Beispiel diene hierzu ein van der Pol-artiger Oszillator mit kubischer Nichtlinearität:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -{x_1}^3 + 0.1(1 - {x_1}^2)x_2 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Numerisch berechnete grafische Darstellungen der stroboskopischen Abbildung von (2.20) (Abb. 2.8) zeigen, daß eine Approximation durch ein Polynom nicht effektiv ist. Die Abbildung beinhaltet Anfangswerte in der Nähe des Ursprungs, wo die Winkelgeschwindigkeit sehr klein ist, und Anfangswerte auf dem Grenzzyklus, wo die Trajektorien schneller vorankommen. Eine Möglichkeit wäre nun, verschiedene getrennte Polynomapproximationen zu versuchen, je eine für die verschiedenen Winkelgeschwindigkeitsbereiche. Da man aber an einer Darstellung *einer* Abbildung für den gesamten Einschwingvorgang interessiert ist, erscheint es sinnvoller, das Problem der Amplituden-Frequenz-Kopplung an der Wurzel zu packen.

Zunächst läßt sich die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ der Oszillation der Trajektorie um den Ursprung in der (x_1, x_2)-Ebene immer berechnen: Wenn $\varphi = \arctan(x_2/x_1)$ der Winkel des Ortsvektors eines Zustands gegenüber der x_1-Achse ist, erhält man durch Differenzieren nach der Zeit:

$$\dot{\varphi} = \frac{x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1}{{x_1}^2 + {x_2}^2} = \frac{x_1F_2 - x_2F_1}{{x_1}^2 + {x_2}^2} \tag{2.21}$$

Dabei sind $F_1 = \dot{x}_1$ und $F_2 = \dot{x}_2$ die entsprechenden Komponenten der Differentialgleichung (2.2). Mit der Kenntnis der Differentialgleichung ist also sofort die Winkelgeschwindigkeit als analytischer Ausdruck gegeben. Damit läßt sich auch gleich die Annahme, daß die Trajektorien den Ursprung umrunden, überprüfen: In diesem Fall darf $\dot{\varphi}$ an keinem Punkt des physikalisch relevanten Gebiets verschwinden. Bei höherdimensionalen Systemen kann man auf diese Weise zwei Koordinaten x_1 und x_2 so auswählen, daß die Trajektorien in der Projektion auf diese Ebene den Punkt $(x_1, x_2) = (0, 0)$ so umrunden, daß die Bedingung $\dot{\varphi} \neq 0$ erfüllt wird.

2.3.2 Elimination der Amplituden-Frequenz-Kopplung durch Normalzeittransformation

Da die Amplituden-Frequenz-Kopplung nun bekannt ist, kann man sie durch Einführung einer neuen Zeit

$$t' = \frac{t}{s} \quad \text{mit} \quad s = \left|\frac{\dot{\varphi}_S}{\dot{\varphi}}\right| \tag{2.22}$$

wegtransformieren. $\dot{\varphi}_S$ ist die Soll-Winkelgeschwindigkeit. Durch diese Transformation wird die Geometrie der Trajektorien nicht verändert, sondern nur deren Geschwindigkeit. Wählt man $\dot{\varphi}_S = 1$, sieht man leicht, daß die Winkelgeschwindigkeit nach der Transformation den Betrag eins erhält, weshalb diese Transformation **Normalzeittransformation** genannt wird.

Berechnet man für das transformierte System eine stroboskopische Abbildung mit $T' = 2\pi$, so erhält man wesentlich einfachere „Gebirge“ in der grafischen Darstellung.

Abbildung 2.9: Numerisch berechnete stroboskopische Abbildungen für den van der Pol-artigen Oszillator (2.20) nach einer Normalzeittransformation für $T' = 2\pi$.

Auch die Approximation durch ein Polynom niedriger Ordnung gelingt nun mit guter Genauigkeit.

In der Zeit $T' = 2\pi$ umrunden die Trajektorien den Ursprung genau einmal. Startet man bei Anfangsbedingungen, für die $x_2 = 0$ gilt, so hat nach einer Oszillation x_2 wieder den Wert Null. Auch für alle anderen möglichen Startwinkel gilt, daß der Startwinkel nach $T' = 2\pi$ wieder erreicht wird. Das Verhältnis x_2/x_1 ist also invariant unter einer stroboskopischen Abbildung für das normalzeittransformierte System. Offensichtlich genügt es dann für die Charakterisierung des Langzeitverhaltens des Systems, die Entwicklung von x_1 *oder* x_2 zu untersuchen, weil sich die andere Variable sofort aus

$$d_p := \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2(t=0)}{x_1(t=0)} = const. \tag{2.23}$$

ermitteln läßt. Daraus folgt:

Die Stroboskop-Abbildung für $T' = 2\pi$ des normalzeittransformierten Systems ist eine Poincaré-Abbildung des ursprünglichen Systems.

Damit lassen sich die Methoden des letzten Abschnitts zur Berechnung von stroboskopischen Abbildungen auch zur Berechnung von Poincaré-Abbildungen nutzen.

2.3.3 Verbesserte Methoden zur Normalzeittransformation

Das Ziel der Normalzeittransformation ist die Ermittlung von Poincaré-Abbildungen. Dafür ist es nicht notwendig, daß die Winkelgeschwindigkeit der Trajektorie immer exakt $|\dot{\varphi}| = 1$ beträgt. Vielmehr genügt es, wenn die Wiederkehrzeit der Trajektorie zur Poincaré-Ebene konstant ist.

Diese Freiheit läßt zwei Verbesserungen gegenüber der Formel (2.22) zu. Zum einen ist es unschön, daß die Skalierungsfunktion im Ursprung unstetig ist, wenn der Ursprung ein Fixpunkt der Differentialgleichung ist. Diese Unstetigkeit kann man beheben [WEHL89], indem man als Soll-Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_S$ die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_H$ eines harmonischen, gedämpften Oszillators wählt:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\gamma x_2 - \omega^2 x_1 \\ \dot{\varphi}_H &= -\frac{{x_2}^2 + \gamma x_1 x_2 + \omega^2 {x_1}^2}{{x_1}^2 + {x_2}^2} \end{aligned} \tag{2.24}$$

Für Systeme mit einem Fixpunkt am Ursprung ($\vec{F}(\vec{x} = \vec{0}) = \vec{0}$) mit stetig partiell differenzierbarem F ergibt sich als passende Wahl für γ und ω^2:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{1}{\zeta} \left.\frac{\partial F_2(\vec{x})}{\partial x_1}\right|_{\vec{x}=\vec{0}} \\ \gamma &= \frac{1}{\zeta} \left(\left.\frac{\partial F_2(\vec{x})}{\partial x_2}\right|_{\vec{x}=\vec{0}} - \left.\frac{\partial F_1(\vec{x})}{\partial x_1}\right|_{\vec{x}=\vec{0}} \right) \\ \zeta &= - \left.\frac{\partial F_1(\vec{x})}{\partial x_2}\right|_{\vec{x}=\vec{0}} \end{aligned} \tag{2.25}$$

Die Poincaré-Abbildung ergibt sich dann als Stroboskop-Abbildung über die Schwingungsdauer des harmonischen, gedämpften Oszillators:

$$T' = 2\pi / \sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \tag{2.26}$$

Zum anderen kann man auch auf die exakte Formel für die Skalierungsfunktion s verzichten und statt dessen einen Näherungsausdruck bis zur 1.Ordnung verwenden[2]. Nach einer Integration über T' wird die Trajektorie die Poincaré-Ebene entweder knapp nicht erreichen oder etwas darüber hinausschießen. Wenn die Poincaré-Ebene so gewählt wird, daß das Trajektorienstück in der Nähe der Poincaré-Ebene gut durch einen Kreisbogen approximiert werden kann, läßt sich der entstandene Fehler aber gut korrigieren. Die Parameter des Krümmungskreises sind durch die Differentialgleichung gegeben [BS89, Kap. 4.3.1.2].

O.B.d.A. soll als Poincaré-Ebene $x_2 = 0$ gewählt werden. Der korrigierte Zustandsvektor $\tilde{\vec{x}}(T')$ ergibt sich aus dem Zustandsvektor $\vec{x}(T')$, der mit einer genäherten Skalierungsfunktion berechnet wurde, wie folgt:

[2] Für Systeme mit schwacher Amplituden-Frequenz-Kopplung ergibt sich oft eine Konstante.

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1(T') &= 0 \\ \tilde{x}_2(T') &= \eta_K + \sqrt{R_K^2 - \xi_K^2} \\ \tilde{x}_i(T') &= x_i(T') + x_1(T') \cdot \frac{F_i\left(\vec{x}(T')\right)}{F_1\left(\vec{x}(T')\right)} \quad \forall i = 3, \ldots, n\end{aligned} \tag{2.27}$$

Dabei sind R_K der Radius und (ξ_K, η_K) die Mittelpunktskoordinaten des Krümmungskreises:

$$\begin{aligned}R_K &= \frac{(\dot{x}_1{}^2 + \dot{x}_2{}^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}_1\ddot{x}_2 - \dot{x}_2\ddot{x}_1} \\ \xi_K &= x_1 - \frac{\dot{x}_2(\dot{x}_1{}^2 + \dot{x}_2{}^2)}{\dot{x}_1\ddot{x}_2 - \dot{x}_2\ddot{x}_1} \\ \eta_K &= x_2 + \frac{\dot{x}_1(\dot{x}_1{}^2 + \dot{x}_2{}^2)}{\dot{x}_1\ddot{x}_2 - \dot{x}_2\ddot{x}_1}\end{aligned}$$

Die durch die stroboskopische Abbildung gelieferte Werte für x_1 und x_2 werden ersetzt durch den Schnittpunkt des Krümmungskreises mit der x_2-Achse. Der Korrekturwert für die übrigen Koordinaten $x_i, \quad i = 3, \ldots, n$ ergibt sich aus dem Produkt des geschätzten Zeitfehlers $x_2/F_2(\vec{x}(T'))$ mit der entsprechenden Komponente des Flußvektors $F_i(\vec{x}(T'))$.

Diese Methode wurde mit Erfolg beim van der Pol-Oszillator angewendet [WEHL89] (vgl. Abb. 2.10). Die Approximation von s durch ein Polynom ermöglicht erstmals die vollanalytische Berechnung von Poincaré-Abbildungen, weil man damit zur Ermittlung der Stroboskop-Abbildung für $T' = 2\pi$ nun das vollanalytische Verfahren aus Abschnitt 2.2.4 verwenden kann. Die analytische Rechnung wird zweckmäßigerweise mit einem Computer-Algebra-System durchgeführt. Solche Systeme produzieren typischerweise recht umfangreiche Ausgaben, weil das Problem des Auffindens von Vereinfachungen eines Ausdrucks von den betreffenden Software-Herstellern noch nicht zufriedenstellend gelöst wurde. Die erhaltene Funktion soll deshalb auch hier nicht wiedergegeben werden. Sie findet sich aber im Fortran-Code in [Wan89].

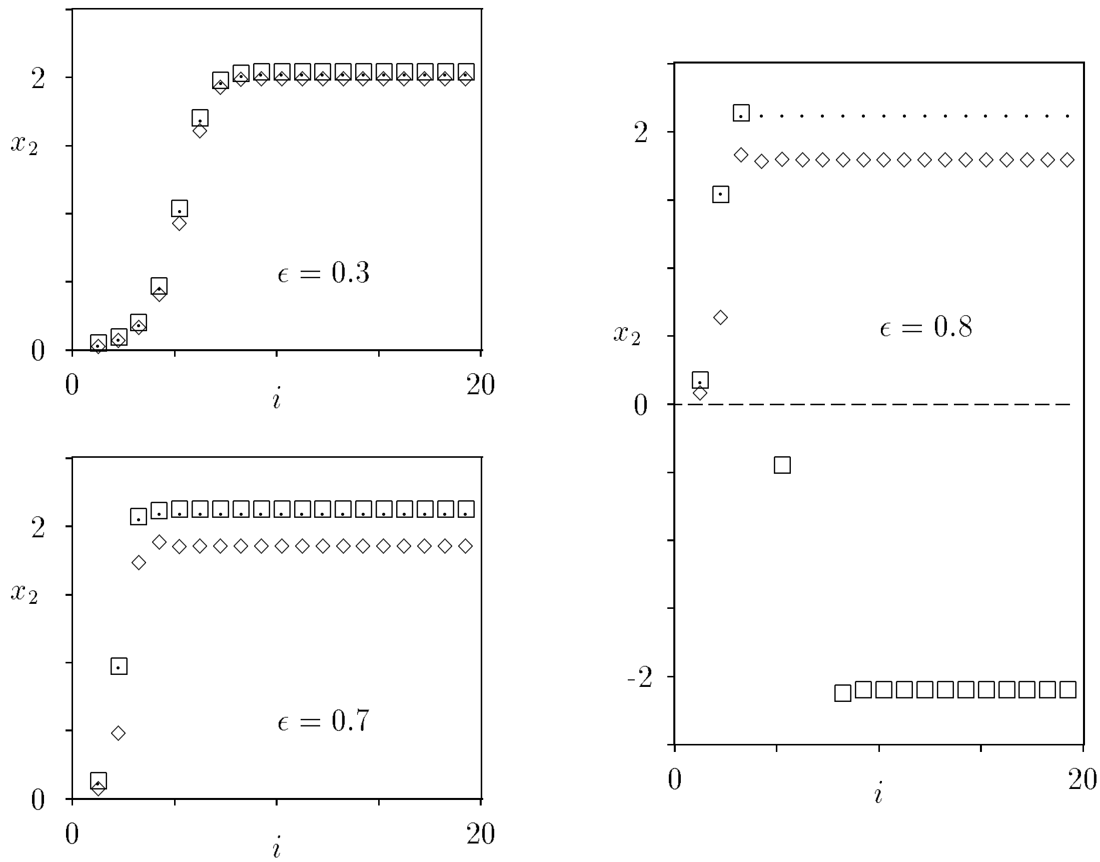

Abbildung 2.10: Einschwingverhalten des van der Pol-Oszillators (1.1) für drei verschiedene Werte von ϵ (im Bild jewils angegeben). Gezeichnet wurden jeweils die x_2-Werte nach Integrationsschritten über T, ausgehend von einem Startwert $(x_1, x_2) = (0, 0.01)$. Die Punkte geben die Ergebnisse bei Verwendung der exakten Transformation (2.22) mit $s = |\dot{\varphi}_H / \dot{\varphi}|$ aus (2.24) und T aus (2.26) an, die Quadrate bei Verwendung der Näherung $s = 1$, $T = 2\pi$ und Korrektur des Fehlers mit der Krümmungskreismethode (2.27). Die Rauten wurden durch mit der Näherung $s = 1$, $T = 2\pi$ und Korrektur des Fehlers durch Nullsetzen von x_1 nach jedem Schritt erhalten.

Offensichtlich ist die Krümmungskreismethode genauer als das schlichte Nullsetzen, jedoch kann die Korrektur überkritisch werden und ein falsches qualitatives Verhalten ergeben (rechtes Bild).