Kapitel 1

Einleitung: Modelle nichtlinearer Dynamik

1.1 Diskrete Abbildungen in der Chaosforschung

Die Erforschung nichtlinearer Systeme, die seit Li und Yorke [LY75] auch gerne als Chaosforschung bezeichnet wird [Gle88], erfuhr in den letzten Jahren einen bemerkenswerten Aufschwung. Durch die zunehmende Verbreitung von elektronischen Rechenanlagen mit beachtlicher numerischer und grafischer Leistungsfähigkeit wurde es möglich, an Stelle von linearisierten Systemen die originalen, nichtlinearen Gleichungen zu untersuchen [RH82]. Einen Überblick über die Entwicklung der nichtlinearen Forschung geben [Swi83], [LP88], [BPV84], [Jac88]. Mittlerweile existieren auch speziell für dieses Fachgebiet erarbeitete Lexika [Ste91], [ESH92], sowie Arbeiten zur didaktischen Umsetzung der Erkenntnisse der Chaosforschung in die Ausbildung [Wor92], [SH92].

Der Zweig der Chaosforschung, der sich mit diskreten nichtlinearen Systemen beschäftigt, konnte in den letzten Jahren bedeutende Erkenntnisse über deren komplexes Verhalten beitragen. Dazu zählen z. B. die Entdeckung universeller Szenarien beim Übergang ins Chaos [Fei83], Methoden zur Charakterisierung des Langzeitverhaltens diskreter Systeme durch Lyapunov-Spektren [ER85] und fraktale Dimension [CE80], sowie zur Steuerung diskreter Systeme [JH90].

In dieser Arbeit werden vor allem Fragestellungen untersucht, die physikalische Anwendungen von Poincaré-Abbildungen betreffen, insbesondere die Vorhersage und Steuerung nichtlinearer Oszillatoren. Poincaré-Abbildungen scheinen dafür besonders geeignet, weil sie oft erheblich einfacher als die zugrundeliegende Differentialgleichung sind. Beispielsweise ergibt sich für einen einfachen konservativen Oszillator als Poincaré-Abbildung die identische Abbildung. Allgemein besitzen Poincaré-Abbildungen eine um eins geringere Dimension als die Differentialgleichung. Aufgrund ihrer diskreten Natur eignen sie sich hervorragend zur Simulation mit digitalen Computern.

Physikalische Anwendungen führen im Regelfall auf kontinuierliche nichtlineare Probleme. Beispielsweise lassen sich aus Grundgleichungen wie den Navier-Stokes- oder den Hamilton-Gleichungen gewöhnliche Differentialgleichungen für die Dynamik von mechanischen Systemen herleiten [LL69]. „In dieser Klasse ist die Wahrscheinlichkeit Null, daß ein blind herausgegriffenes System lösbar ist im Sinne eines Lehrbuchbeispiels“ [EMK83, G.Eilenberger, Seite X-4].

Die entscheidende Schnittstelle zwischen der physikalischen Welt der Differentialgleichungen und den gut studierbaren diskreten Systemen ist die analytische Berechnung von zeitdiskreten Modellen aus kontinuierlichen. Sie soll in dieser Arbeit erläutert werden.

Dabei ist zu unterscheiden zwischen Systemen, die mit relativ wenigen Freiheitsgraden modelliert werden können und solchen, für deren Modellierung viele Freiheitsgrade benötigt werden. Im ersten Fall muß man sich bei der Beschreibung der Dynamik entweder darauf verlassen, daß fast alle Freiheitsgrade vollständig von sehr wenigen versklavt werden; oder man verwendet ein niederdimensionales Modell mit einem Rauschterm, der die Wirkung der nicht ganz versklavten Freiheitsgrade beschreibt.

Offensichtlich braucht man Methoden, die diesen Rauschterm quantifizieren können. Dabei kann nicht davon ausgegangen werden, daß dieses Rauschen normalverteilt sein muß. Wenigstens die nächsten Momente der Verteilung sollte man mitabschätzen können.

Systeme, bei denen eine Beschreibung mit wenigen Freiheitsgraden versagt, sind z. B. Systeme mit raum-zeitlicher Dynamik. Werden zu deren Modellierung partielle Differentialgleichungen verwendet, kann es passieren, daß diese Gleichungen unlösbar und deshalb auch nicht überprüfbar sind [Wol86, Kap.1]. Das gilt in bestimmten Fällen auch für numerische Lösungsansätze [Roa72].

Optimal auf den Computer zugeschnitten sind sog. zelluläre Automaten [FTW83] oder „Locally Coupled Maps“ [Kan89, Kan90]. Mit zellulären Automaten kann man Phänomene aus der Natur mit raum-zeitlicher Dynamik modellieren [Wol86]. Die Simulation der zellulären Automaten gelingt auf einem Computer exakt, ohne Fehler wie etwa Diskretisierungsfehler. Alle Abweichungen zwischen Simulation und Realität müssen demnach in der Modellbildung begründet sein. Die Qualität eines Modells läßt sich damit direkt durch einen Vergleich des Simulationsergebnisses mit der tatsächlich eingetretenen Entwicklung in der Natur bestimmen. Die Algorithmen für die zellulären Automaten sind in hohem Maße parallelisierbar [TM87], so daß in kurzer Zeit viele Simulationen durchgeführt werden können.

Die zellulären Automaten werden immer auf einem Gitter gerechnet. Die Geometrie des Gitters überträgt sich dabei normalerweise auf die Geometrie der Lösung [BE91]. In der Regel ist dies unphysikalisch, so daß einige Forscher zu sog. „random lattices“ übergegangen sind [MH90]. Die fehlende Gittersymmetrie erfordert jedoch schwer handhabbare Modifikationen in den Regeln der Automaten. In dieser Arbeit wird gezeigt, daß man stochastische Elemente auch in den Zeitverlauf einbauen kann, womit man diese Nachteile vermeiden kann.

1.2 Ziele der Modellbildung

Die Ermittlung von guten Modellen für die Dynamik experimenteller Systeme bedeutet einen enormen rechentechnischen Aufwand. Dieser wird gerechtfertigt durch die Vorteile des Modells gegenüber den reinen Meßdaten, wobei man vor allem fordern muß [Hüb92]:

- **Kompaktheit:** Das Modell für eine Zeitserie oder eine räumliche Struktur aus N Datenpunkten sollte mit nur wenigen K Parametern ($K \ll N$) codiert werden können. Beispiel: Modellierung einer periodischen Funktion mit einer Fourier-Reihe

- **Vorhersagemöglichkeit:** Das Modell sollte die zukünftige Entwicklung des Systems bis zu einer gewissen Genauigkeit voraussagen, auch für benachbarte Werte von Kontrollparametern und Anfangsbedingungen [FS87, CM87, CH87].

- **Reproduzierbarkeit:** Wiederholungen des Experiments sollten zu den gleichen Modellparametern führen.

- **Stetigkeit:** Der Zusammenhang zwischen den Kontrollparametern des Systems und den Modellparametern sollte stetig sein, um den Modellparametern eine physikalische Bedeutung zuordnen zu können. Diese Eigenschaft ermöglicht auch die Vorhersage von Systemen, deren Parameter sich langsam verändern.

- **Steuerbarkeit:** Aus dem Modell sollten sich Steuerkräfte berechnen lassen, die es gestatten, das System rückkopplungsfrei zu einer vorgegebenen Wunschdynamik zu steuern.

- **Signifikanz der Modellparameter:** Die Vernachlässigung von Parametern, die betragsmäßig kleiner als ihr Fehlerbalken sind, sollte nicht zur Verschlechterung des Modells führen [Hüb89, OHW90].

- **Abschätzung verborgener Ordnungsparameter:** Bei vielen experimentellen Systemen lassen sich nicht alle Ordnungsparameter[1] beobachten. Das Modell sollte eine Abschätzung dieser Werte liefern können.

Aus diesen Forderungen ergibt sich, daß versucht werden muß, gute niederdimensionale Modelle für die Dynamik eines Systems zu finden. Das gilt auch für Systeme mit vielen Freiheitsgraden, von denen aber die meisten fast vollständig versklavt sind. Den Resteinfluß der vielen versklavten Freiheitsgrade kann man evtl. durch Einführung geeigneter Rauschterme quantifizieren.

Schließlich hat man sich zwischen kontinuierlichen und diskreten Modellen zu entscheiden. Kontinuierliche Modelle (Differentialgleichungen) lassen sich zwar aus experimentellen Daten rekonstruieren [Kau87], bringen aber ein wesentliches Problem mit sich: Die Untersuchung des Verhaltens des Modells — und damit der Vergleich zwischen Modell und Experiment — ist im allgemeinen nur durch numerische Integration möglich. Das bedeutet, daß man sich aus Rechenzeitgründen nur einen schlechten Überblick über die Variation der Dynamik bei Veränderung der Parameter verschaffen kann.

Diesen Nachteil besitzen diskrete Modelle nicht. Sie sind sehr schnell mit Hilfe eines digitalen Computers untersuchbar, weil sich der folgende Systemzustand einfach als Funktion des alten ergibt. Die vollständige, kontinuierliche Dynamik kann man im Bedarfsfall z.B. durch Interpolation zwischen den errechneten Zustandswerten ermitteln.

Für Systeme mit vielen, nicht versklavten Freiheitsgraden bieten die diskreten Modelle vergleichbare Vorteile gegenüber den entsprechenden kontinuierlichen Modellen, den partiellen Differentialgleichungen. Hier wirkt sich der Vorteil sogar noch dramatischer aus, weil die numerischen Lösungsverfahren für nichtlineare, partielle Differentialgleichungen noch wesentlich schlechter entwickelt sind als bei gewöhnlichen Differentialgleichungen [2].

Abb. 1.1 zeigt eine Übersicht der Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Modellierungsansätzen. Einige der Zusammenhänge werden in dieser Arbeit explizit behandelt.

[1] Ordnungsparameter sind die nicht versklavten Freiheitsgrade eines Systems, keine Kontrollparameter. Sie bilden die Zustandsvariablen eines niederdimensionalen Modells.

[2] „The newcomer to computational fluid dynamics is forewarned: In this field, there is at least as much artistry as science.“ [Roa72]

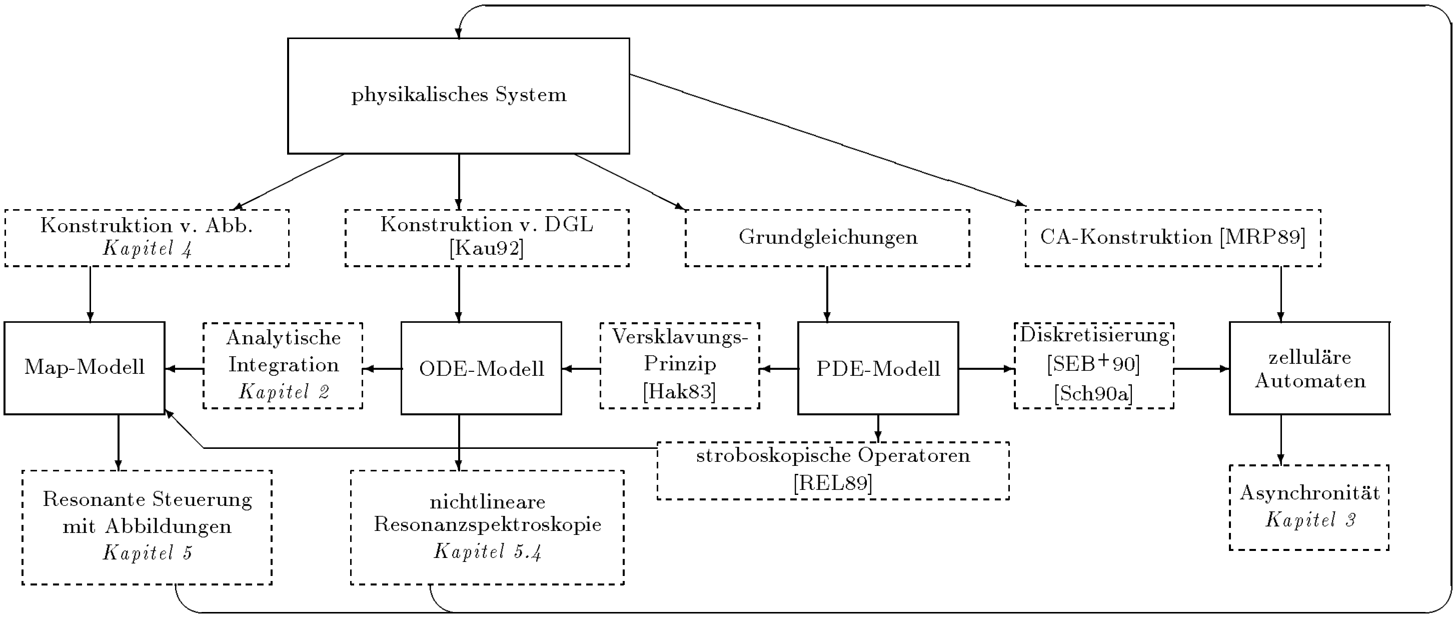

Abbildung 1.1: Schema zur Beschreibung und Steuerung nichtlinearer Systeme

1.3 Systeme mit glatter Kurzzeit- und komplexer Langzeitdynamik

Nichtlineare Systeme zeigen oft eine sehr komplexe Dynamik, die eine Vorhersage auf längere Zeiträume prinzipiell unmöglich macht [Sch89b, S.116]. Bei genauerem Hinsehen stellt man fest, daß bei vielen Systemen diese Komplexität nicht auf der Skala kurzer Zeiten[3] auftritt, d.h. daß sich die Dynamik einer Zeitreihe zwischen zwei gegebenen Stützpunkten innerhalb eines kurzen Zeitintervalls in guter Näherung durch Interpolation gewinnen läßt.

Derartige Systeme treten in vielen Bereichen der Physik und anderen quantitativen Wissenschaften auf. Aus der großen Zahl von Beispielen dazu seien hier einige aufgelistet; einige weitere werden in den folgenden Unterabschnitten erläutert.

- rf-biased Josephson-Junction [PH90]
- Moleküldynamik [PDR88, KH91]
- nichtlineare Schwinger im Doppelmuldenpotential [Duf18, Moo87]
- Lorenz-Modell der Rayleigh-Bénard-Konvektion [Lor63],[Sch89b, Anhang A]
- chaotische Schwingungen eines Wobblers [EHML87]
- chaotische Schwingungen in einem Schwingkreis mit Kapazitätsdiode [Lin81, TPJ82]
- chaotische Schwingungen im Toda-Potential [KMIL84]

Wie im folgenden gezeigt wird, läßt sich die Dynamik dieser Systeme gut durch Abbildungen beschreiben, die einen Systemzustand $\vec{x}$ zu einer Zeit t_0 abbilden auf den Zustand zu einer späteren Zeit $t_0 + T$, wobei T nicht unbedingt konstant sein muß. Obwohl die genaue Definition der verwendbaren Abbildungen erst in Abschnitt 2.1 erfolgt, werden einige grafische Darstellungen dieser Abbildungen bei den Systemen gezeigt, wobei dann in den Bildunterschriften angegeben ist, wie diese Darstellungen zustande kommen.

[3] Zeiten, die kürzer sind als die typische Zeitskala des Systems. Die typische Zeitskala ist z.B. bei oszillierenden Systemen gegeben durch die Schwingungsdauer.

1.3.1 Der van der Pol-Oszillator

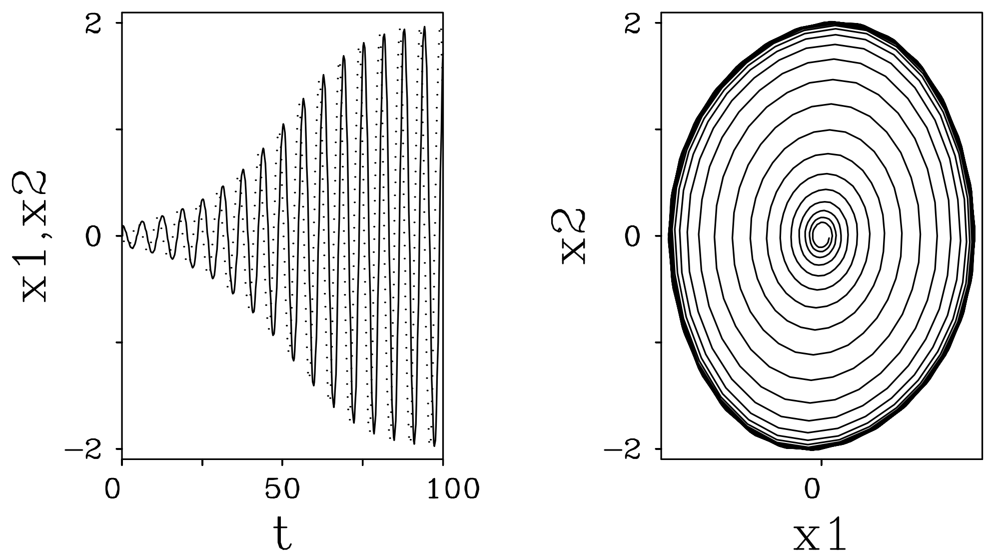

Abbildung 1.2: Lösungen für den van der Pol-Oszillator (1.1) mit $\epsilon = 0.1$. Links: x (durchgezogen) und $\dot{x}$ (gepunktet) als Funktion der Zeit. Rechts: Phasenraumdarstellung

Die Differentialgleichung

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \tag{1.1}$$

— oder als System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung ($x_1 = x, x_2 = \dot{x}$) formuliert —

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2 \end{aligned}$$

beschreibt einen nichtlinearen Oszillator, dessen Trajektorien im Phasenraum in einen Grenzzyklus einlaufen, m.a.W. dessen Amplitude sich bis zu einem bestimmten Grenzwert verstärkt. Dies wird durch einen amplitudenabhängigen Dämpfungsterm erreicht, der dann negativ wird, also Verstärkung bewirkt, wenn die Amplitude kleiner als ein Sollwert (hier 1) wird. Der Kontrollparameter ϵ gibt die Größe dieser nichtlinearen Selbstverstärkung an.

Die Gleichung (1.1) ist ursprünglich ein Modell für einen elektrischen Oszillator, der als nichtlineares Verstärkungsglied eine Triode enthält, findet aber auch u.a. Anwendungen in der Aerodynamik [Dow75], bei windinduzierten Schwingungen von

Gebäuden [ND70], Rad-Fahrbahn-Problemen [Coo80], Modellierung von bestimmten chemischen Reaktionen [URP74] und in der Biophysik zur Modellierung des Herzrhythmus [BSN85].

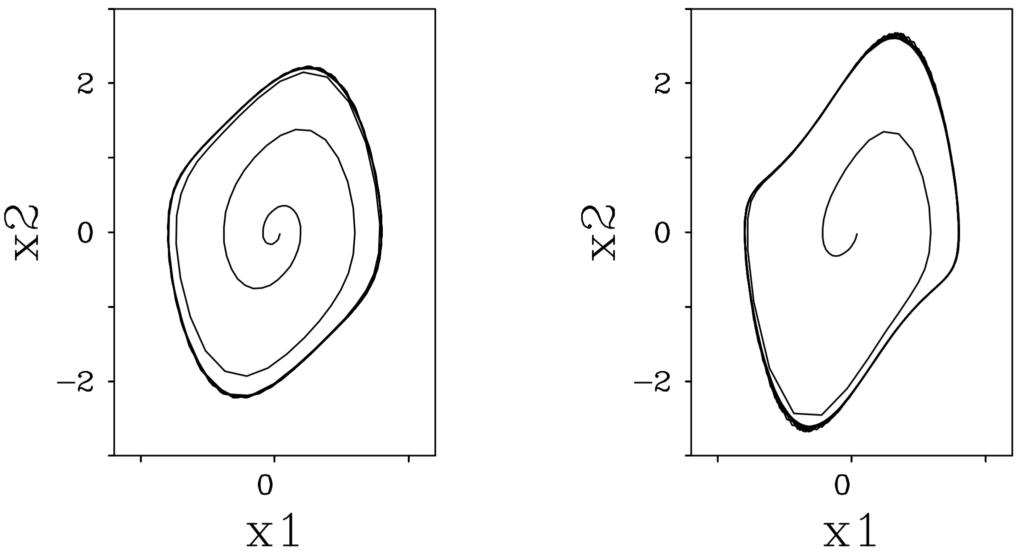

Abbildung 1.3: Phasenraumporträt für den van der Pol-Oszillator mit $\epsilon = 0.5$ (links) und $\epsilon = 1.0$ (rechts)

Der van der Pol-Oszillator besitzt für alle positiven Werte von ϵ einen Grenzzyklus, eine periodische, nichtharmonische Schwingung. Für sehr kleine ϵ ist der Grenzzyklus fast harmonisch, was einer Ellipse im Phasenraum entspricht.

Steigt der Wert von ϵ, so wird das Phasenraum-Diagramm zunehmend eckiger, weshalb man ϵ auch als Eckigkeit des van der Pol-Oszillators bezeichnen kann. Die Abb. (1.2) und (1.3) zeigen numerisch [IMS84] gewonnene Lösungen von (1.1).

1.3.2 Der Helmholtz-Oszillator

Eine Klasse von Systemen, die ebenfalls einfache Kurzzeitdynamik aufweisen, sind die nichtlinearen, gedämpften und sinusförmig angetriebenen Potentialschwinger. Die niedrigste, nichtlineare Näherung ist dabei durch den Helmholtz-Oszillator

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + b_1 x + b_2 x^2 = K cos(\omega t + \phi) \tag{1.2}$$

gegeben. Dabei bedeuten: μ: Stärke der linearen Reibung, b_1, b_2: Parameter, die die Potentialform bestimmen, K: Amplitude des harmonischen Antriebs, ω: Kreisfrequenz des Antriebs und ϕ: Phasenverschiebung des Antriebs. Diese Gleichung wurde erstmals von Helmholtz [Hel70] angegeben. Das globale Verhalten dieses Schwingers ist stark verwandt mit dem des Duffing-Oszillators [Duf18].

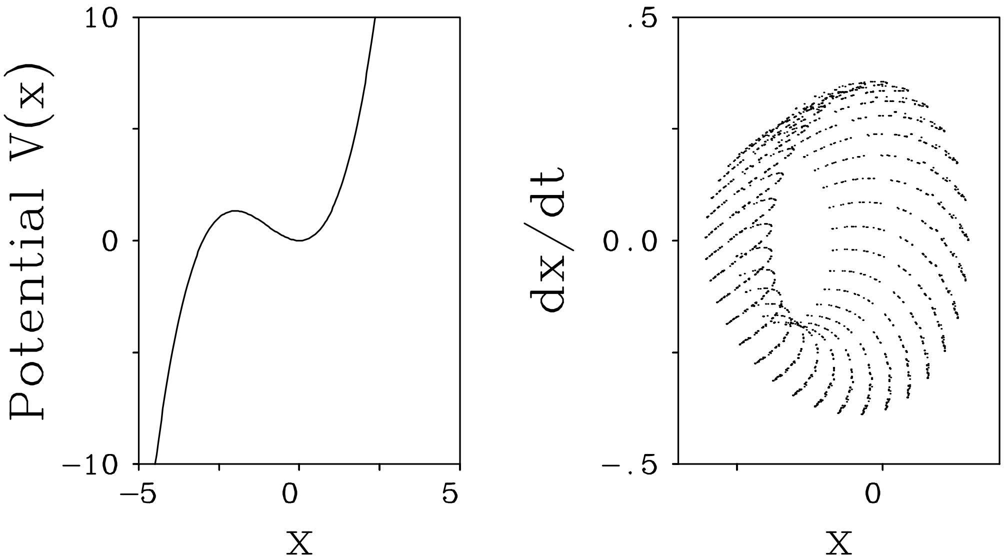

Abbildung 1.4: Potential $V(x) = \frac{b_1}{2}x^2 + \frac{b_2}{3}x^3$ des Helmholtz-Oszillators (1.2) für $b_1 = 2$ und $b_2 = 1$ (links) und Phasenraum-Darstellung der Schwingung (rechts) für $b_1 = 0.5$, $b_2 = 1$, $\mu = 0.5$, $\omega = 1$, $\phi = 0$ und $K = 0.3$. Der Zeitschritt zwischen zwei Punkten beträgt $2\pi/30$. Deutlich ist eine sog. Bäcker-Transformation zu erkennen: Während eines Umlaufs faltet sich der Attraktor zusammen, anschließend erfolgt eine Streckung.

Beachtenswert ist, daß das Potential für fallende Werte von x schnell nach $-\infty$ strebt. Dadurch kann es vorkommen, daß für bestimmte Anfangsbedingungen oder Kontrollparameter-Werte die Lösung von (1.2) nicht beschränkt bleibt. Eine zutreffende Beschreibung realer Phänomene durch Gleichung (1.2) ist also nur für nicht zu große Amplitudenwerte zu erwarten.

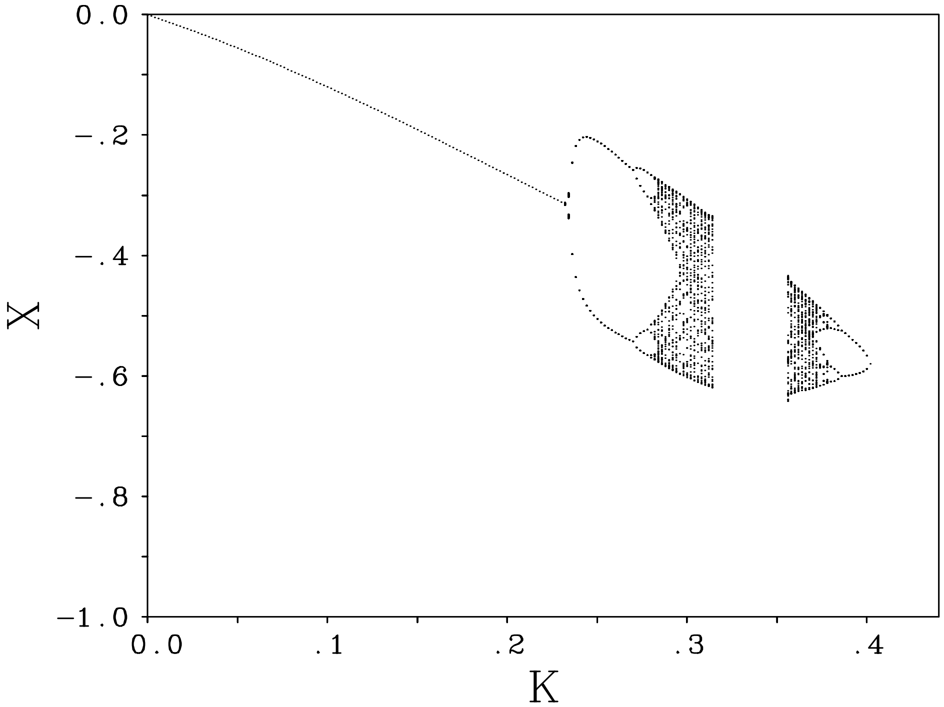

Abbildung 1.5: Bifurkationsdiagramm des Helmholtz-Oszillators (1.2) für $b_1 = 0.5$, $b_2 = 1$, $\mu = 0.5$, $\omega = 1$, $\phi = 0$ und $0 \leq K \leq 0.44$. Aufgetragen sind die x-Werte zum Zeitpunkt des Antriebsmaximums, also $x_i = x(i \cdot 2\pi/\omega + \phi)$ für $200 < i < 270$. Die Lücke zwischen den beiden Teilen des Diagramms ensteht dadurch, daß für diese Werte von K die Auslenkung x_1 schnell nach $-\infty$ strebt. Wird K noch größer, gibt es Anfangsbedingungen, für die der Antrieb das System dominieren kann. Noch höhere Werte von K (ab ca. 0.42) lassen dann aber keine stabile Schwingung mehr zu. Als Anfangsbedingung wurde jeweils gewählt: $x = -0.5$, $\dot{x} = 0.1$

Das Verhalten des Helmholtz-Oszillators wurde in [Bun87] genauer mit numerischen und störungstheoretischen Methoden untersucht. In Abb. (1.4 rechts) ist ein Phasenraumporträt des Helmholtz-Oszillators im chaotischen Bereich und in Abb. (1.5) das Bifurkationsdiagramm für die x-Werte angegeben, welches man erhält, wenn man die Amplitude des Antriebs K im Bereich $[0, 0.4]$ variiert. Dabei wurden für jeden K-Wert 200 Oszillationen des Antriebs abgewartet, um das Einschwingverhalten auszublenden; bei den nächsten 200 Oszillationen wurde jedesmal der x-Wert beim Antriebsmaximum eingezeichnet.

1.3.3 Das Rössler-System

Abbildung 1.6: Trajektorie des Rössler-Systems in räumlicher Darstellung

Rössler gab 1976 [Rös76] folgendes autonome, dreidimensionale Differentialgleichungssystem für ein chemisches dynamisches System an:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \frac{1}{5}x_2 \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{5} + x_3(x_1 - \mu) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Seitdem wird dieses System in den meisten einführenden Schriften über Chaostheorie beschrieben, etwa in [LL83]. Darüberhinaus wird es oft als Testsystem für nichtlineare Methoden verwendet, z.B. in [Lie91, Paw91].

Der Grund für die Beliebtheit dieses Systems ist seine Verwandtheit mit dem Lorenz-System [Hol87, S.21]. Das Rössler-System zeigt auch die wichtigsten typischen Eigenschaften chaotischer Systeme: einen seltsamen Attraktor(vgl. Abb. 1.6), Übergang ins Chaos durch Periodenverdopplung (vgl. Abb. 1.7), Streckung und Faltung des Attraktors, etc.

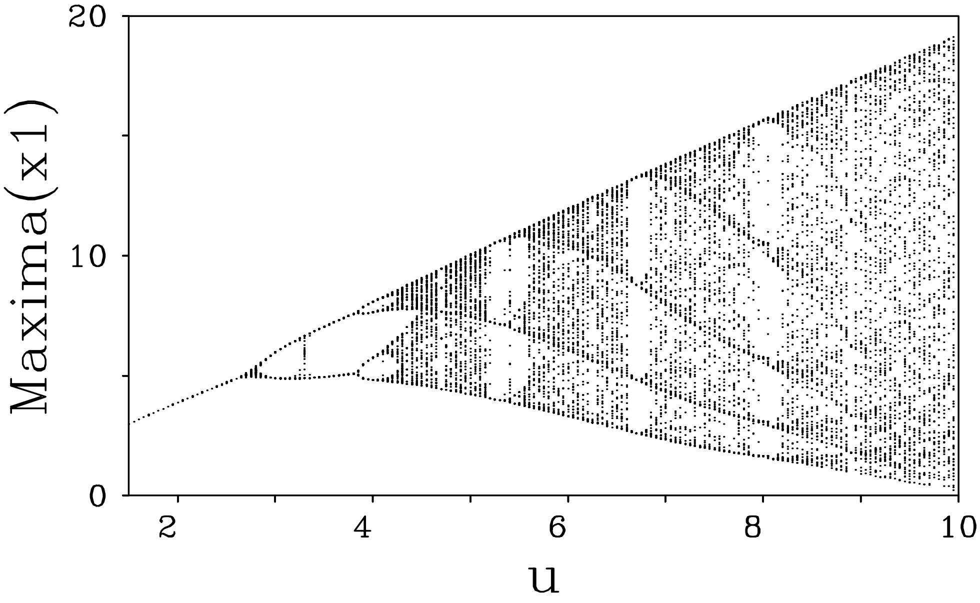

Abbildung 1.7: Bifurkationsdiagramm des Rössler-Systems, numerisch bestimmt. Aufgetragen sind jeweils 100 aufeinanderfolgende Maxima von x_1 gegen den Kontrollparameter μ. Gestartet wurde mit $\vec{x} = (5, 0, 0)$. Um das Einschwingverhalten auszublenden wurde ab $t = 10$ noch 10 Maxima abgewartet, bevor zu plotten begonnen wurde.