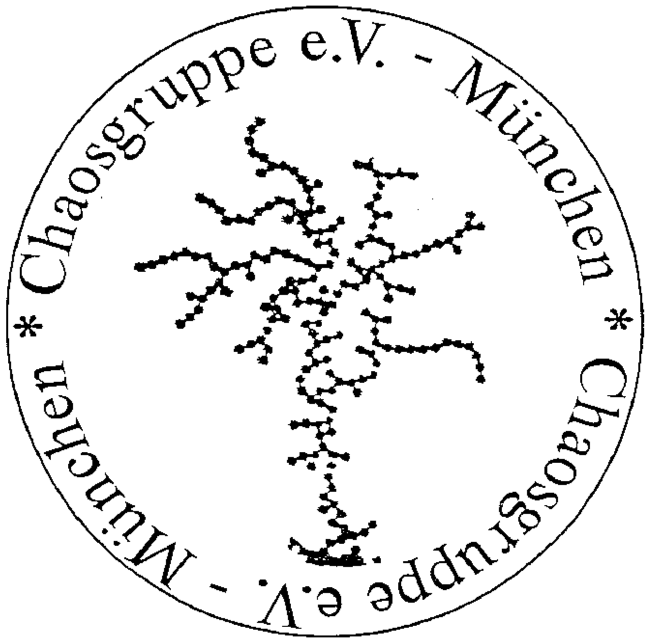
Werner Eberl

Modellierung und Steuerung nichtlinearer Oszillatoren mit diskreten Abbildungen



Verlag Kunst und Alltag

Für meinen Vater

Impressum

ISBN 3 88410 061 0

Verlag Kunst und Alltag
Dr. Wolfgang Baur
Gartenstr. 1
8000 München 40

Druck: G.L. Copy-Shop Zentrale GmbH, München

Technische Universität München
Physik-Department

Modellierung und Steuerung nichtlinearer Oszillatoren mit diskreten Abbildungen

Werner Eberl

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Physik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. T. v.Egidy
Prüfer der Dissertation:
1. Univ.-Prof. Dr. E. Sackmann
2. Univ.-Prof. Dr. L. van Hemmen

Die Dissertation wurde am 11.3.1992 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Physik am 26.6.1992 angenommen.

Zusammenfassung

Poincaré-Abbildungen sind niederdimensionaler und besitzen in vielen Fällen eine erheblich einfachere Struktur als das zugehörige kontinuierliche System und lassen sich leicht mit digitalen Rechenanlagen integrieren. In dieser Arbeit werden neuartige Approximationsverfahren vorgestellt und experimentell getestet, mit denen aus Differentialgleichungen und Zeitreihen physikalisch relevanter kontinuierlicher Systeme diskrete Abbildungen bestimmt werden können, welche die wesentlichen Symmetrien der Originaldynamik wiedergeben und sich zur Vorhersage und Steuerung eignen.

Es wird untersucht, bei welchen Klassen von Differentialgleichungen für die zugehörigen Poincaré-Abbildungen eine besonders einfache Struktur zu erwarten ist. Es zeigt sich, daß derartige Differentialgleichungen so tranformiert werden können, daß für das transformierte Differentialgleichungssystem Poincaré-Abbildungen spezielle stroboskopische Abbildungen sind. Es wird gezeigt, daß sich damit stroboskopische Abbildungen wesentlich vereinfachen. Algebraische und numerische Approximationsmethoden zur Bestimmung von Poincaré-Abbildungen werden dadurch erheblich vereinfacht.

Ferner wird gezeigt, daß sich mit dosiert-asynchronen diskreten Abbildungen Gittereffekte vermeiden lassen und damit raum-zeitliche kontinuierliche dynamische Systeme mit Rauschtermen besonders gut modelliert werden können.

Zeitreihen physikalischer Systeme sind mit Rauschen behaftet. In dieser Arbeit wird eine Methode vorgestellt, die es ermöglicht, aus rauschbehafteten Zeitreihen jene Abbildungen zu ermitteln, für die der Vorhersagefehler minimal wird.

Es wird experimentell und theoretisch gezeigt, daß es möglich ist, kontinuierliche Systeme mit Hilfe von rekonstruierten diskreten Abbildungen rückkopplungsfrei zu steuern. Dies ermöglicht es, Poincaré-Abbildungen experimentell durch Resonanzspektroskopie zu bestimmen.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung: Modelle nichtlinearer Dynamik

1.1 Diskrete Abbildungen in der Chaosforschung

Die Erforschung nichtlinearer Systeme, die seit Li und Yorke [LY75] auch gerne als Chaosforschung bezeichnet wird [Gle88], erfuhr in den letzten Jahren einen bemerkenswerten Aufschwung. Durch die zunehmende Verbreitung von elektronischen Rechenanlagen mit beachtlicher numerischer und grafischer Leistungsfähigkeit wurde es möglich, an Stelle von linearisierten Systemen die originalen, nichtlinearen Gleichungen zu untersuchen [RH82]. Einen Überblick über die Entwicklung der nichtlinearen Forschung geben [Swi83], [LP88], [BPV84], [Jac88]. Mittlerweile existieren auch speziell für dieses Fachgebiet erarbeitete Lexika [Ste91], [ESH92], sowie Arbeiten zur didaktischen Umsetzung der Erkenntnisse der Chaosforschung in die Ausbildung [Wor92], [SH92].

Der Zweig der Chaosforschung, der sich mit diskreten nichtlinearen Systemen beschäftigt, konnte in den letzten Jahren bedeutende Erkenntnisse über deren komplexes Verhalten beitragen. Dazu zählen z. B. die Entdeckung universeller Szenarien beim Übergang ins Chaos [Fei83], Methoden zur Charakterisierung des Langzeitverhaltens diskreter Systeme durch Lyapunov-Spektren [ER85] und fraktale Dimension [CE80], sowie zur Steuerung diskreter Systeme [JH90].

In dieser Arbeit werden vor allem Fragestellungen untersucht, die physikalische Anwendungen von Poincaré-Abbildungen betreffen, insbesondere die Vorhersage und Steuerung nichtlinearer Oszillatoren. Poincaré-Abbildungen scheinen dafür besonders geeignet, weil sie oft erheblich einfacher als die zugrundeliegende Differentialgleichung sind. Beispielsweise ergibt sich für einen einfachen konservativen Oszillator als Poincaré-Abbildung die identische Abbildung. Allgemein besitzen Poincaré-Abbildungen eine um eins geringere Dimension als die Differentialgleichung. Aufgrund ihrer diskreten Natur eignen sie sich hervorragend zur Simulation mit digitalen Computern.

Physikalische Anwendungen führen im Regelfall auf kontinuierliche nichtlineare Probleme. Beispielsweise lassen sich aus Grundgleichungen wie den Navier-Stokes- oder den Hamilton-Gleichungen gewöhnliche Differentialgleichungen für die Dynamik von mechanischen Systemen herleiten [LL69]. „In dieser Klasse ist die Wahrscheinlichkeit Null, daß ein blind herausgegriffenes System lösbar ist im Sinne eines Lehrbuchbeispiels“ [EMK83, G.Eilenberger, Seite X-4].

Die entscheidende Schnittstelle zwischen der physikalischen Welt der Differentialgleichungen und den gut studierbaren diskreten Systemen ist die analytische Berechnung von zeitdiskreten Modellen aus kontinuierlichen. Sie soll in dieser Arbeit erläutert werden.

Dabei ist zu unterscheiden zwischen Systemen, die mit relativ wenigen Freiheitsgraden modelliert werden können und solchen, für deren Modellierung viele Freiheitsgrade benötigt werden. Im ersten Fall muß man sich bei der Beschreibung der Dynamik entweder darauf verlassen, daß fast alle Freiheitsgrade vollständig von sehr wenigen versklavt werden; oder man verwendet ein niederdimensionales Modell mit einem Rauschterm, der die Wirkung der nicht ganz versklavten Freiheitsgrade beschreibt.

Offensichtlich braucht man Methoden, die diesen Rauschterm quantifizieren können. Dabei kann nicht davon ausgegangen werden, daß dieses Rauschen normalverteilt sein muß. Wenigstens die nächsten Momente der Verteilung sollte man mitabschätzen können.

Systeme, bei denen eine Beschreibung mit wenigen Freiheitsgraden versagt, sind z. B. Systeme mit raum-zeitlicher Dynamik. Werden zu deren Modellierung partielle Differentialgleichungen verwendet, kann es passieren, daß diese Gleichungen unlösbar und deshalb auch nicht überprüfbar sind [Wol86, Kap.1]. Das gilt in bestimmten Fällen auch für numerische Lösungsansätze [Roa72].

Optimal auf den Computer zugeschnitten sind sog. zelluläre Automaten [FTW83] oder „Locally Coupled Maps“ [Kan89, Kan90]. Mit zellulären Automaten kann man Phänomene aus der Natur mit raum-zeitlicher Dynamik modellieren [Wol86]. Die Simulation der zellulären Automaten gelingt auf einem Computer exakt, ohne Fehler wie etwa Diskretisierungsfehler. Alle Abweichungen zwischen Simulation und Realität müssen demnach in der Modellbildung begründet sein. Die Qualität eines Modells läßt sich damit direkt durch einen Vergleich des Simulationsergebnisses mit der tatsächlich eingetretenen Entwicklung in der Natur bestimmen. Die Algorithmen für die zellulären Automaten sind in hohem Maße parallelisierbar [TM87], so daß in kurzer Zeit viele Simulationen durchgeführt werden können.

Die zellulären Automaten werden immer auf einem Gitter gerechnet. Die Geometrie des Gitters überträgt sich dabei normalerweise auf die Geometrie der Lösung [BE91]. In der Regel ist dies unphysikalisch, so daß einige Forscher zu sog. „random lattices" übergegangen sind [MH90]. Die fehlende Gittersymmetrie erfordert jedoch schwer handhabbare Modifikationen in den Regeln der Automaten. In dieser Arbeit wird gezeigt, daß man stochastische Elemente auch in den Zeitverlauf einbauen kann, womit man diese Nachteile vermeiden kann.

1.2 Ziele der Modellbildung

Die Ermittlung von guten Modellen für die Dynamik experimenteller Systeme bedeutet einen enormen rechentechnischen Aufwand. Dieser wird gerechtfertigt durch die Vorteile des Modells gegenüber den reinen Meßdaten, wobei man vor allem fordern muß [Hüb92]:

- **Kompaktheit:** Das Modell für eine Zeitserie oder eine räumliche Struktur aus N Datenpunkten sollte mit nur wenigen K Parametern ($K \ll N$) codiert werden können. Beispiel: Modellierung einer periodischen Funktion mit einer Fourier-Reihe

- **Vorhersagemöglichkeit:** Das Modell sollte die zukünftige Entwicklung des Systems bis zu einer gewissen Genauigkeit voraussagen, auch für benachbarte Werte von Kontrollparametern und Anfangsbedingungen [FS87, CM87, CH87].

- **Reproduzierbarkeit:** Wiederholungen des Experiments sollten zu den gleichen Modellparametern führen.

- **Stetigkeit:** Der Zusammenhang zwischen den Kontrollparametern des Systems und den Modellparametern sollte stetig sein, um den Modellparametern eine physikalische Bedeutung zuordnen zu können. Diese Eigenschaft ermöglicht auch die Vorhersage von Systemen, deren Parameter sich langsam verändern.

- **Steuerbarkeit:** Aus dem Modell sollten sich Steuerkräfte berechnen lassen, die es gestatten, das System rückkopplungsfrei zu einer vorgegebenen Wunschdynamik zu steuern.

- **Signifikanz der Modellparameter:** Die Vernachlässigung von Parametern, die betragsmäßig kleiner als ihr Fehlerbalken sind, sollte nicht zur Verschlechterung des Modells führen [Hüb89, OHW90].

- **Abschätzung verborgener Ordnungsparameter:** Bei vielen experimentellen Systemen lassen sich nicht alle Ordnungsparameter[1] beobachten. Das Modell sollte eine Abschätzung dieser Werte liefern können.

Aus diesen Forderungen ergibt sich, daß versucht werden muß, gute niederdimensionale Modelle für die Dynamik eines Systems zu finden. Das gilt auch für Systeme mit vielen Freiheitsgraden, von denen aber die meisten fast vollständig versklavt sind. Den Resteinfluß der vielen versklavten Freiheitsgrade kann man evtl. durch Einführung geeigneter Rauschterme quantifizieren.

Schließlich hat man sich zwischen kontinuierlichen und diskreten Modellen zu entscheiden. Kontinuierliche Modelle (Differentialgleichungen) lassen sich zwar aus experimentellen Daten rekonstruieren [Kau87], bringen aber ein wesentliches Problem mit sich: Die Untersuchung des Verhaltens des Modells — und damit der Vergleich zwischen Modell und Experiment — ist im allgemeinen nur durch numerische Integration möglich. Das bedeutet, daß man sich aus Rechenzeitgründen nur einen schlechten Überblick über die Variation der Dynamik bei Veränderung der Parameter verschaffen kann.

Diesen Nachteil besitzen diskrete Modelle nicht. Sie sind sehr schnell mit Hilfe eines digitalen Computers untersuchbar, weil sich der folgende Systemzustand einfach als Funktion des alten ergibt. Die vollständige, kontinuierliche Dynamik kann man im Bedarfsfall z.B. durch Interpolation zwischen den errechneten Zustandswerten ermitteln.

Für Systeme mit vielen, nicht versklavten Freiheitsgraden bieten die diskreten Modelle vergleichbare Vorteile gegenüber den entsprechenden kontinuierlichen Modellen, den partiellen Differentialgleichungen. Hier wirkt sich der Vorteil sogar noch dramatischer aus, weil die numerischen Lösungsverfahren für nichtlineare, partielle Differentialgleichungen noch wesentlich schlechter entwickelt sind als bei gewöhnlichen Differentialgleichungen [2].

Abb. 1.1 zeigt eine Übersicht der Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Modellierungsansätzen. Einige der Zusammenhänge werden in dieser Arbeit explizit behandelt.

---

[1] Ordnungsparameter sind die nicht versklavten Freiheitsgrade eines Systems, keine Kontrollparameter. Sie bilden die Zustandsvariablen eines niederdimensionalen Modells.

[2] „The newcomer to computational fluid dynamics is forewarned: In this field, there is at least as much artistry as science.“ [Roa72]

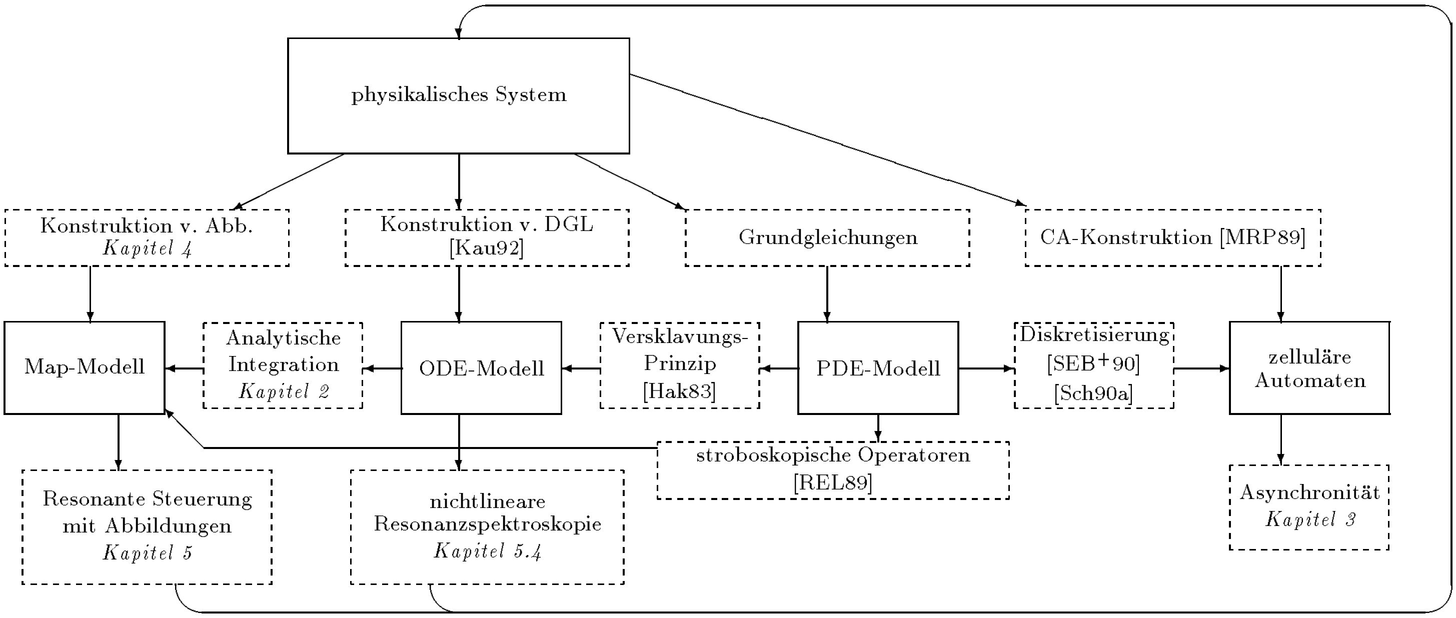


Abbildung 1.1: Schema zur Beschreibung und Steuerung nichtlinearer Systeme

1.3 Systeme mit glatter Kurzzeit- und komplexer Langzeitdynamik

Nichtlineare Systeme zeigen oft eine sehr komplexe Dynamik, die eine Vorhersage auf längere Zeiträume prinzipiell unmöglich macht [Sch89b, S.116]. Bei genauerem Hinsehen stellt man fest, daß bei vielen Systemen diese Komplexität nicht auf der Skala kurzer Zeiten[3] auftritt, d.h. daß sich die Dynamik einer Zeitreihe zwischen zwei gegebenen Stützpunkten innerhalb eines kurzen Zeitintervalls in guter Näherung durch Interpolation gewinnen läßt.

Derartige Systeme treten in vielen Bereichen der Physik und anderen quantitativen Wissenschaften auf. Aus der großen Zahl von Beispielen dazu seien hier einige aufgelistet; einige weitere werden in den folgenden Unterabschnitten erläutert.

- rf-biased Josephson-Junction [PH90]
- Moleküldynamik [PDR88, KH91]
- nichtlineare Schwinger im Doppelmuldenpotential [Duf18, Moo87]
- Lorenz-Modell der Rayleigh-Bénard-Konvektion [Lor63],[Sch89b, Anhang A]
- chaotische Schwingungen eines Wobblers [EHML87]
- chaotische Schwingungen in einem Schwingkreis mit Kapazitätsdiode [Lin81, TPJ82]
- chaotische Schwingungen im Toda-Potential [KMIL84]

Wie im folgenden gezeigt wird, läßt sich die Dynamik dieser Systeme gut durch Abbildungen beschreiben, die einen Systemzustand $\vec{x}$ zu einer Zeit t_0 abbilden auf den Zustand zu einer späteren Zeit $t_0 + T$, wobei T nicht unbedingt konstant sein muß. Obwohl die genaue Definition der verwendbaren Abbildungen erst in Abschnitt 2.1 erfolgt, werden einige grafische Darstellungen dieser Abbildungen bei den Systemen gezeigt, wobei dann in den Bildunterschriften angegeben ist, wie diese Darstellungen zustande kommen.

---

[3] Zeiten, die kürzer sind als die typische Zeitskala des Systems. Die typische Zeitskala ist z.B. bei oszillierenden Systemen gegeben durch die Schwingungsdauer.

1.3.1 Der van der Pol-Oszillator

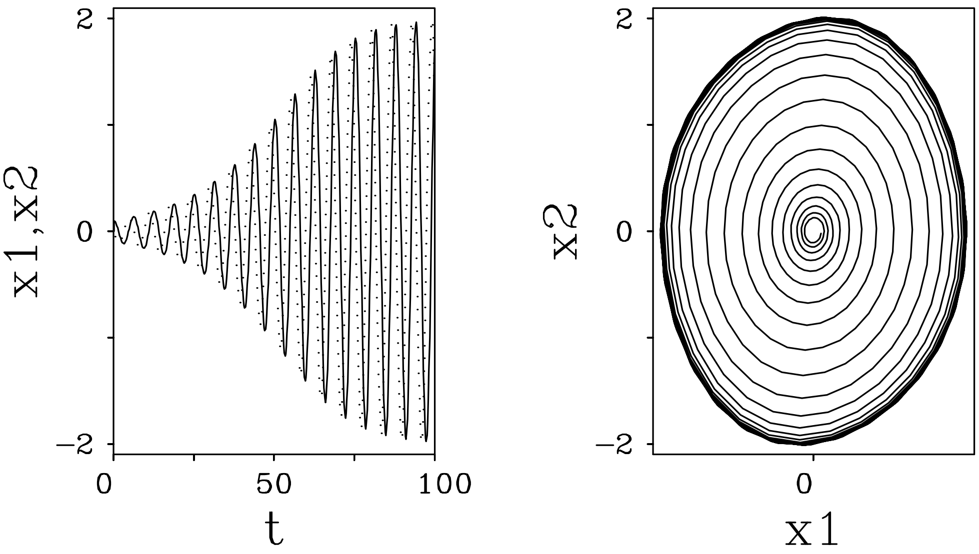


Abbildung 1.2: Lösungen für den van der Pol-Oszillator (1.1) mit $\epsilon = 0.1$. Links: x (durchgezogen) und $\dot{x}$ (gepunktet) als Funktion der Zeit. Rechts: Phasenraumdarstellung

Die Differentialgleichung

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \tag{1.1}$$

— oder als System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung ($x_1 = x, x_2 = \dot{x}$) formuliert —

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2 \end{aligned}$$

beschreibt einen nichtlinearen Oszillator, dessen Trajektorien im Phasenraum in einen Grenzzyklus einlaufen, m.a.W. dessen Amplitude sich bis zu einem bestimmten Grenzwert verstärkt. Dies wird durch einen amplitudenabhängigen Dämpfungsterm erreicht, der dann negativ wird, also Verstärkung bewirkt, wenn die Amplitude kleiner als ein Sollwert (hier 1) wird. Der Kontrollparameter ϵ gibt die Größe dieser nichtlinearen Selbstverstärkung an.

Die Gleichung (1.1) ist ursprünglich ein Modell für einen elektrischen Oszillator, der als nichtlineares Verstärkungsglied eine Triode enthält, findet aber auch u.a. Anwendungen in der Aerodynamik [Dow75], bei windinduzierten Schwingungen von

Gebäuden [ND70], Rad-Fahrbahn-Problemen [Coo80], Modellierung von bestimmten chemischen Reaktionen [URP74] und in der Biophysik zur Modellierung des Herzrhythmus [BSN85].

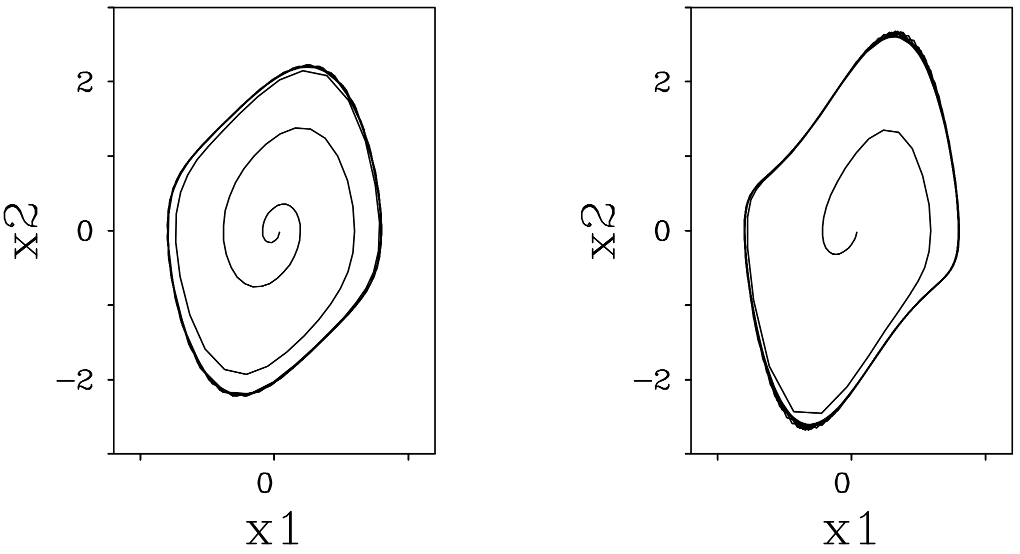


Abbildung 1.3: Phasenraumporträt für den van der Pol-Oszillator mit $\epsilon = 0.5$ (links) und $\epsilon = 1.0$ (rechts)

Der van der Pol-Oszillator besitzt für alle positiven Werte von ϵ einen Grenzzyklus, eine periodische, nichtharmonische Schwingung. Für sehr kleine ϵ ist der Grenzzyklus fast harmonisch, was einer Ellipse im Phasenraum entspricht.

Steigt der Wert von ϵ, so wird das Phasenraum-Diagramm zunehmend eckiger, weshalb man ϵ auch als Eckigkeit des van der Pol-Oszillators bezeichnen kann. Die Abb. (1.2) und (1.3) zeigen numerisch [IMS84] gewonnene Lösungen von (1.1).

1.3.2 Der Helmholtz-Oszillator

Eine Klasse von Systemen, die ebenfalls einfache Kurzzeitdynamik aufweisen, sind die nichtlinearen, gedämpften und sinusförmig angetriebenen Potentialschwinger. Die niedrigste, nichtlineare Näherung ist dabei durch den Helmholtz-Oszillator

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + b_1 x + b_2 x^2 = K cos(\omega t + \phi) \tag{1.2}$$

gegeben. Dabei bedeuten: μ: Stärke der linearen Reibung, b_1, b_2: Parameter, die die Potentialform bestimmen, K: Amplitude des harmonischen Antriebs, ω: Kreisfrequenz des Antriebs und ϕ: Phasenverschiebung des Antriebs. Diese Gleichung wurde erstmals von Helmholtz [Hel70] angegeben. Das globale Verhalten dieses Schwingers ist stark verwandt mit dem des Duffing-Oszillators [Duf18].

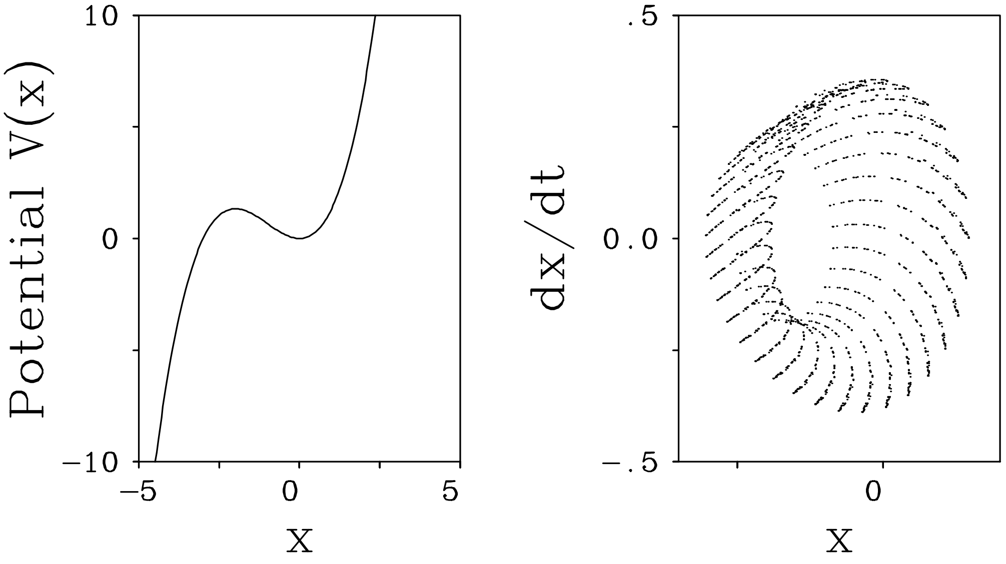


Abbildung 1.4: Potential $V(x) = \frac{b_1}{2}x^2 + \frac{b_2}{3}x^3$ des Helmholtz-Oszillators (1.2) für $b_1 = 2$ und $b_2 = 1$ (links) und Phasenraum-Darstellung der Schwingung (rechts) für $b_1 = 0.5$, $b_2 = 1$, $\mu = 0.5$, $\omega = 1$, $\phi = 0$ und $K = 0.3$. Der Zeitschritt zwischen zwei Punkten beträgt $2\pi/30$. Deutlich ist eine sog. Bäcker-Transformation zu erkennen: Während eines Umlaufs faltet sich der Attraktor zusammen, anschließend erfolgt eine Streckung.

Beachtenswert ist, daß das Potential für fallende Werte von x schnell nach $-\infty$ strebt. Dadurch kann es vorkommen, daß für bestimmte Anfangsbedingungen oder Kontrollparameter-Werte die Lösung von (1.2) nicht beschränkt bleibt. Eine zutreffende Beschreibung realer Phänomene durch Gleichung (1.2) ist also nur für nicht zu große Amplitudenwerte zu erwarten.

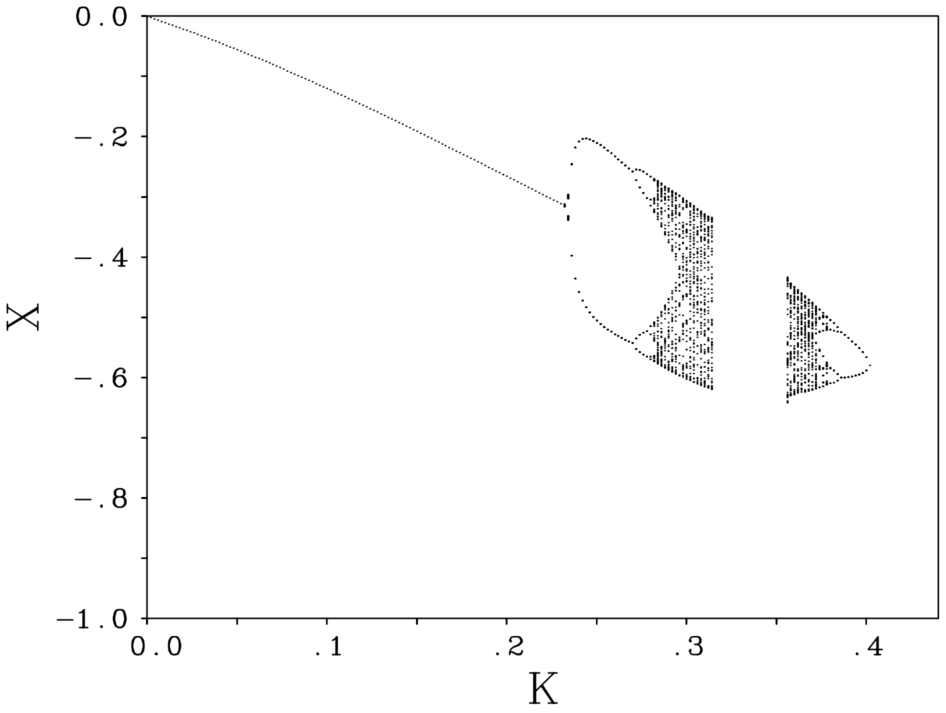


Abbildung 1.5: Bifurkationsdiagramm des Helmholtz-Oszillators (1.2) für $b_1 = 0.5$, $b_2 = 1$, $\mu = 0.5$, $\omega = 1$, $\phi = 0$ und $0 \leq K \leq 0.44$. Aufgetragen sind die x-Werte zum Zeitpunkt des Antriebsmaximums, also $x_i = x(i \cdot 2\pi/\omega + \phi)$ für $200 < i < 270$. Die Lücke zwischen den beiden Teilen des Diagramms ensteht dadurch, daß für diese Werte von K die Auslenkung x_1 schnell nach $-\infty$ strebt. Wird K noch größer, gibt es Anfangsbedingungen, für die der Antrieb das System dominieren kann. Noch höhere Werte von K (ab ca. 0.42) lassen dann aber keine stabile Schwingung mehr zu. Als Anfangsbedingung wurde jeweils gewählt: $x = -0.5$, $\dot{x} = 0.1$

Das Verhalten des Helmholtz-Oszillators wurde in [Bun87] genauer mit numerischen und störungstheoretischen Methoden untersucht. In Abb. (1.4 rechts) ist ein Phasenraumporträt des Helmholtz-Oszillators im chaotischen Bereich und in Abb. (1.5) das Bifurkationsdiagramm für die x-Werte angegeben, welches man erhält, wenn man die Amplitude des Antriebs K im Bereich $[0, 0.4]$ variiert. Dabei wurden für jeden K-Wert 200 Oszillationen des Antriebs abgewartet, um das Einschwingverhalten auszublenden; bei den nächsten 200 Oszillationen wurde jedesmal der x-Wert beim Antriebsmaximum eingezeichnet.

1.3.3 Das Rössler-System

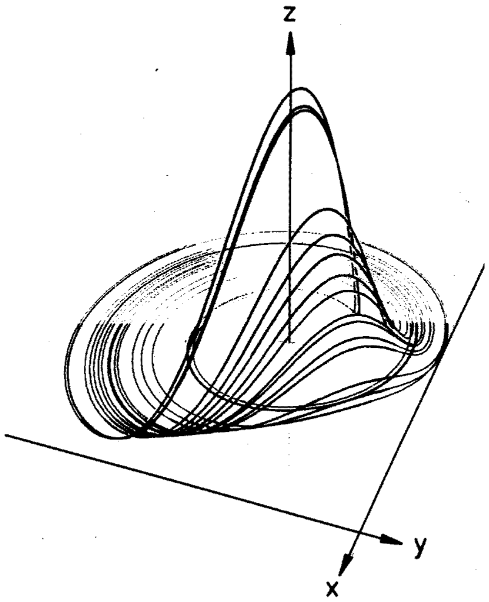


Abbildung 1.6: Trajektorie des Rössler-Systems in räumlicher Darstellung

Rössler gab 1976 [Rös76] folgendes autonome, dreidimensionale Differentialgleichungssystem für ein chemisches dynamisches System an:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \frac{1}{5}x_2 \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{5} + x_3(x_1 - \mu) \end{aligned} \qquad (1.3)$$

Seitdem wird dieses System in den meisten einführenden Schriften über Chaostheorie beschrieben, etwa in [LL83]. Darüberhinaus wird es oft als Testsystem für nichtlineare Methoden verwendet, z.B. in [Lie91, Paw91].

Der Grund für die Beliebtheit dieses Systems ist seine Verwandtheit mit dem Lorenz-System [Hol87, S.21]. Das Rössler-System zeigt auch die wichtigsten typischen Eigenschaften chaotischer Systeme: einen seltsamen Attraktor(vgl. Abb. 1.6), Übergang ins Chaos durch Periodenverdopplung (vgl. Abb. 1.7), Streckung und Faltung des Attraktors, etc.

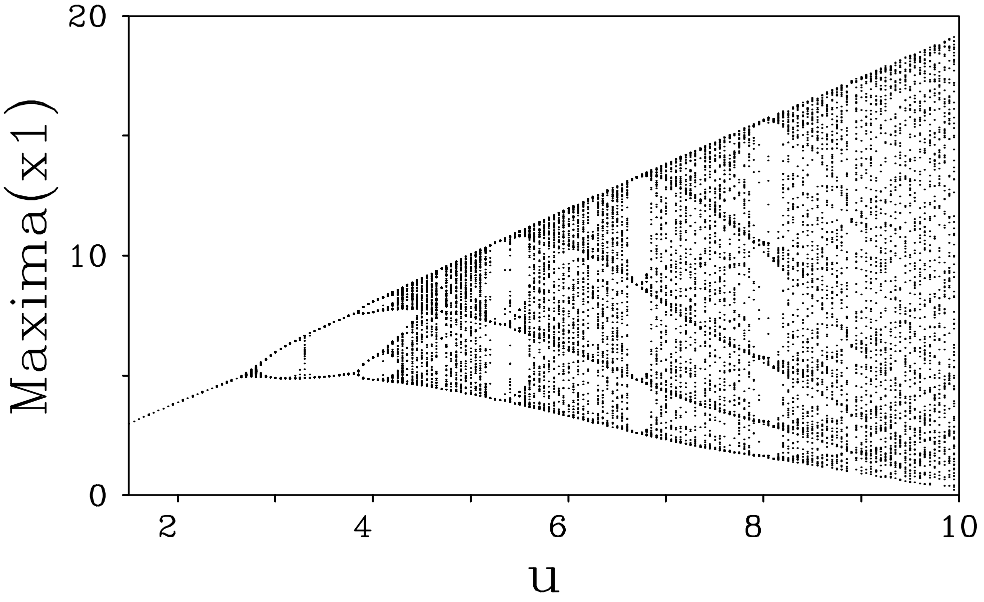


Abbildung 1.7: Bifurkationsdiagramm des Rössler-Systems, numerisch bestimmt. Aufgetragen sind jeweils 100 aufeinanderfolgende Maxima von x_1 gegen den Kontrollparameter μ. Gestartet wurde mit $\vec{x} = (5, 0, 0)$. Um das Einschwingverhalten auszublenden wurde ab $t = 10$ noch 10 Maxima abgewartet, bevor zu plotten begonnen wurde.

Kapitel 2

Ermittlung von Abbildungen aus Differentialgleichungen

Zeitdiskrete Modelle sind Abbildungen, die einen Systemzustand zu einer bestimmten Zeit auf den Systemzustand zu einer späteren Zeit abbilden. Dabei sollen die Zeitschritte weder infinitesimal klein sein wie bei einer Differentialgleichung, noch können sie beliebig groß gewählt werden. Bei chaotischen Systemen sind Vorhersagen sinnlos sind, die sich über einen Zeitraum erstrecken, der die Vorhersagedauer $T_{\max}$ überschreitet. $T_{\max}$ kann man dabei aus der Kolmogorov-Entropie K berechnen [Far82]:

$$T_{\max} \sim \frac{1}{K} \log \left(\frac{1}{\Delta x_0} \right) \tag{2.1}$$

Dabei ist Δx_0 die Unsicherheit in den Anfangsbedingungen, die nur logarithmisch in $T_{\max}$ eingeht. Eine Verbesserung der Meßgenauigkeit wirkt sich also nur schwach auf den möglichen Vorhersagezeitraum aus. Für Systeme mit ortsunabhängigen Lyapunov-Exponenten ergibt sich K einfach als Summe der positiven Lyapunov-Exponenten. Diese wiederum lassen sich numerisch aus einer Differentialgleichung bestimmen [LKP87]. Die Berechnung kostet sehr viel Rechenzeit, wenn die Lyapunov-Exponenten durch numerische Integration aus Differentialgleichungen bestimmt werden müssen. Lyapunov-Exponenten lassen sich wesentlich schneller für Abbildungen bestimmen, weil dort die Integrationsarbeit entfällt.

Die leichtere Auswertbarkeit diskreter Modelle ist einer der wesentlichen Vorteile von diskreten Modellen. Es sollen jetzt Abbildungen definiert werden, die sich für die Repräsentation der Dynamik nichtlinearer Differentialgleichungen eignen, und sodann Methoden zu ihrer Berechnung aus gegebenen Differentialgleichungen gezeigt werden.

2.1 Definition geeigneter Abbildungen

Gegeben sei ein dynamisches System in Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x},t), \quad \vec{x} \in I\!R^m \tag{2.2}$$

Ist $\vec{F}$ nicht explizit zeitabhängig, heißt das System autonom. Nicht-autonome Systeme lassen sich durch Einführung einer weiteren Zustandsvariablen x_{m+1} mit $dx_{m+1}/dt = 1$ und der Ersetzung $\vec{F}(\vec{x},t) \to \vec{F}(\vec{x},x_{m+1}) \to \vec{F}(\vec{y})$, $y \in I\!R^{m+1}$ auch als autonomes System schreiben.

Gesucht ist eine Abbildung $\vec{S} : \vec{x}(t_0) \to \vec{x}\left(t_0 + T\left(\vec{x}(t_0)\right)\right)$, die einen Systemzustand zu einer Zeit t_0 auf den Systemzustand zur späteren Zeit $t_0 + T$ abbildet. Die Frage ist, wie T von $\vec{x}(t_0)$ abhängen soll, damit $\vec{S}$ ein möglichst effektives Modell für die Dynamik des nichtlinearen Systems ist.

Effektiv ist das Modell dann, wenn es leicht numerisch oder analytisch studierbar ist. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn einige Komponenten der Abbildung trivial werden, womit sich die Zahl der zur Beschreibung notwendigen Dimensionen vermindert.

2.1.1 Die stroboskopische Abbildung

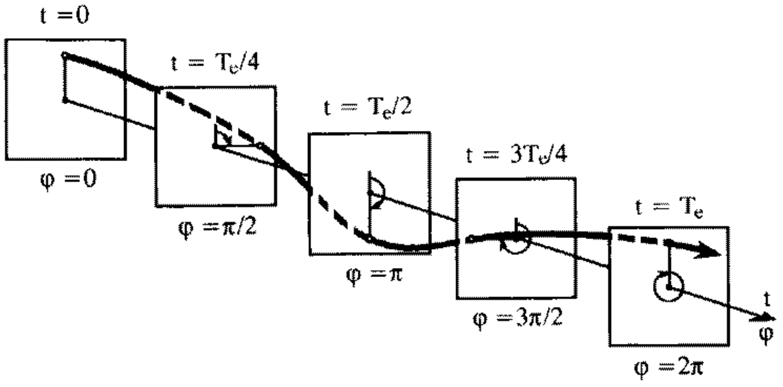


Abbildung 2.1: Zum Prinzip der stroboskopischen Abbildung

Falls F periodisch mit $\hat{T}$ von der Zeit abhängt, bietet es sich an, $T = \hat{T} = \text{const.}$ zu wählen. Das System wird damit periodisch „beleuchtet“, weshalb man diese Abbildung auch stroboskopische Abbildung nennt.

Die stroboskopische Abbildung, die sich aus (2.2) ergibt, ist autonom und m-dimensional. Sie enthält sämtliche zeitliche Information, da T bekannt ist: Die i-te Iteration einer stroboskopischen Abbildung liefert den Systemzustand zur Zeit $t_0 + i \cdot T$.

2.1.2 Poincaré-Abbildungen

Stroboskopische Abbildungen lassen sich zwar relativ gut berechnen, sind aber nicht die effektivste Methode zur Beschreibung autonomer Systeme ohne feste Eigenfrequenz.

Im folgenden betrachten wir Zustände $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathcal{X}$, wobei $\mathcal{X}$ das physikalisch relevante Gebiet des Zustandsraums ist.

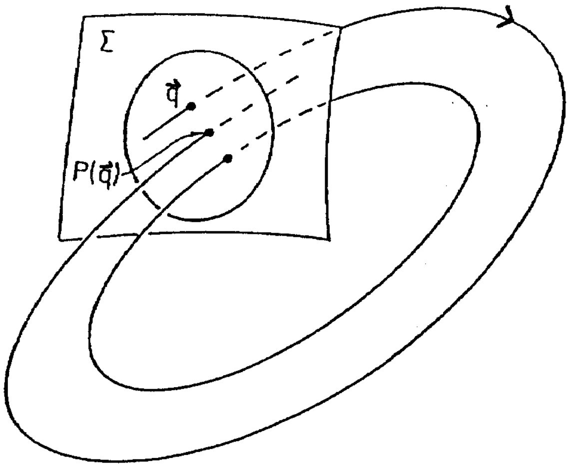


Abbildung 2.2: Zum Prinzip der Poincaré-Abbildung. Die Abbildung P bildet den Durchtoßpunkt $\vec{q}$ auf den nächsten Durchstoßpunkt $P(\vec{q})$ ab.

Man definiert nun eine Hyperfläche $\Sigma : \sigma(\vec{x}) = 0$, die immer transversal zu $\vec{F}(\vec{x})$ steht, für deren Normalenvektor $\vec{n}$ also gilt: $\vec{n}\vec{F}(\vec{x}) \neq 0 \;\; \forall \vec{x} \in \mathcal{X}$. Die Schnittpunkte $\vec{q}$ der Trajektorien mit Σ bilden einen sog. Poincaré-Schnitt des Systems (Abb. 2.2).

Wählt man nur Schnittpunkte, bei denen die Trajektorie die Hyperfläche in einer bestimmten Richtung durchstößt, erhält man einen einseitigen Poincaré-Schnitt. Diese Variante wird meistens verwendet.

Die Poincaré-Abbildung

$$P : \vec{q}_i \rightarrow \vec{q}_{i+1}, \qquad \vec{q}_i, \vec{q}_{i+1} \in \Sigma \tag{2.3}$$

des Systems ist die Dynamik der Punkte des Poincaré-Schnitts, also die Abbildung, die den nächsten Schnittpunkt als Funktion des vorigen angibt. Durch die Wahl der Poincaré-Fläche, also die Festlegung einer Variablen, reduziert sich die Dimension der Abbildung um eins auf $m-1$.

Bei den meisten Systemen lassen sich zusätzliche Korrelationen zwischen den verbleibenden Variablen angeben. Bei konservativen Systemen oder Teilsystemen geschieht dies über die Ausnutzung der Erhaltungsgrößen. Bei dissipativen Systemen wird das Phasenraumvolumen oft derart stark kontrahiert, daß die Dimension des Attraktors nur unwesentlich über $m-1$ liegt, die des Poincaré-Schnitts damit nur unwesentlich über $m-2$. Auf dem Attraktor läßt sich damit in guter Approximation eine weitere Variable eliminieren.

Somit lassen sich auch für chaotische Systeme (deren kontinuierliche Darstellung ja mindestens dreidimensional sein muß [GH83, S.44f.]) eindimensionale Poincaré-Abbildungen angeben. Dabei ist das Hauptproblem die Umrechnung der Kontrollparameter des kontinuierlichen Systems in die Parameter der Abbildung.

2.1.3 Next-Maxima-Abbildungen, Next-Extrema-Abbildungen

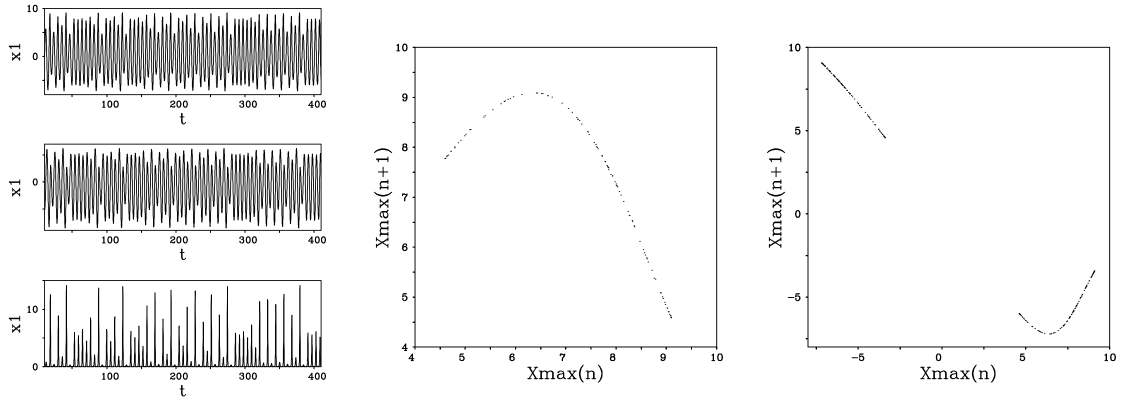


Abbildung 2.3: Zeitreihe (links), Next-Maxima-Abbildung (mitte) und Next-Extrema-Abbildung (rechts) des Rössler-Systems für $\mu = 4.5$

Eine Next-Maxima-Abbildung (Next-Extrema-Abbildung) ist eine Funktion, die — wenigstens näherungsweise — einen Maximalwert (Extremwert) einer Variablen eines dynamischen Systems auf den nächsten Maximalwert (Extremwert) derselben Variablen abbildet. Die Existenz einer solchen Abbildung ist im allgemeinen Fall nicht sichergestellt. Auf jeden Fall existiert eine Next-Maxima- bzw. Next-Extrema-Relation

$$\mathcal{R} : \{(u,v) | u = \hat{x}_i, v = \hat{x}_{i+1}, i \in I\!N\} \tag{2.4}$$

wobei $\hat{x}_i$ der i-te Extremwert der Zustandsvariablen x sei.

Für viele nichtlineare Systeme existieren gute Approximationen von Next-Maxima- oder Next-Extrema-Abbildungen durch Polynome oder andere glatte Funktionen. In diesen Fällen lassen sich einige Eigenschaften der Dynamik dieser Systeme sehr leicht mit Hilfe dieser Abbildungen untersuchen, weil diese definitionsgemäß immer *eindimensional* sind. Die analytische Berechnung solcher Approximationen ist im allgemeinen Fall sehr schwierig.

Für Differentialgleichungen zweiter Ordnung $\ddot{z} + F(z, \dot{z}) = 0$ sind Next-Maxima-Abbildungen identisch zu einer Poincaré-Abbildung mit der Poincaré-Ebene $\dot{z} = 0$. Dies kann man folgendermaßen verstehen:

Durch die Substitutionen $x_1 := z$ und $x_2 := \dot{z}$ ergibt sich das zweidimensionale System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -F(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Als Poincaré-Schnitt verwendet man nun diejenigen Teile der x_1-Achse, für die gilt $F(x_1, 0) > 0$, also gerade die Maxima von x_1. Die Next-Extrema-Abbildung ist der zweiseitige Poincaré-Schnitt, also der Schnitt mit der gesamten x_1-Achse.

2.1.4 Übersicht über diskrete Abbildungen für dynamische Systeme

	stroboskopische Abbildung	Poincaré-Abbildung	Next-Maxima-Abbildung
Dimension	N	$N-1$	1
analyt. Berechenbarkeit	gut	mittel	schlecht
Invertierbarkeit	ja	ja	im allgemeinen nicht

Tabelle 2.1: Vergleich verschieden definierter Abbildungen als Modelle für die komplexe Dynamik nichtlinearer N-dimensionaler Differentialgleichungen

2.2 Ermittlung stroboskopischer Abbildungen

Die Verfahren zur Berechnung von Poincaré-Abbildungen (Kapitel 2.3) basieren auf Verfahren zur Berechnung von stroboskopischen Abbildungen. Deshalb sollen in den Abschnitten 2.2.2 bis 2.2.4 drei Verfahren vorgestellt werden, mit denen sich letztere aus gegebenen Differentialgleichungen berechnen lassen. Allen drei Verfahren ist gemeinsam, daß sie einen analytischen Näherungsausdruck für die stroboskopische Abbildung des Systems liefern, in dem die Abhängigkeit der Parameter der Abbildung von den Kontrollparametern des Systems ersichtlich ist. Das zweite und dritte Verfahren läßt sich momentan nur auf Differentialgleichungen anwenden, deren Flußvektorfeld sich als Polynom schreiben läßt. Eine Erweiterung auf allgemeinere Flußvektorfelder ist aber denkbar.

2.2.1 Beschränkung auf das physikalisch relevante Gebiet

Gegeben sei eine Differentialgleichung

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, t, \vec{p}), \quad \vec{x} \in I\!R^m, \quad \vec{p} \in I\!R^n \tag{2.5}$$

mit m Zustandsvariablen und n Kontrollparametern. Zur Berechnung der stroboskopischen Abbildung eignet sich ein Ansatz jeder Komponente als Potenzreihe:

$$S_k\left(\vec{\xi}, \vec{p}, t_0, T\right) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m = 0}^{\infty} c_{k; i_1, i_2, \ldots, i_m}(\vec{p}, t_0, T) \prod_{j=1}^{m} {\xi_j}^{i_j} \tag{2.6}$$

Dabei ist $\vec{\xi} = \vec{x}(t = t_0)$ der Vektor der Anfangsbedingungen.

Um die Konvergenz der Potenzreihen besser untersuchen zu können, transformiert man das physikalisch interessierende Gebiet der Anfangsbedingungen und Kontrollparameter auf das Intervall $[-1, 1]$.

Eine kompaktere Schreibweise erhält man, wenn man die Kontrollparameter wie Zustandsvariablen behandelt, deren zeitliche Ableitung verschwindet. Damit ergibt sich als transformierte Differentialgleichung:

$$\begin{array}{rcll}
\dot{\vec{y}} & = & \vec{G}(\vec{y}, t), \vec{y} \in I\!R^{m+n} \qquad \text{mit} & (2.7) \\
G_i(\vec{y}, t) & = & \left\{ \begin{array}{cl} \frac{2}{b_i - a_i} f_i(\vec{u}, t) & \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ 0 & \text{für} \quad i = m+1, m+2, \ldots, m+n \end{array} \right. & \text{und} \\
u_j & = & (b_j + a_j)/2 + y_j(b_j - a_j)/2, \quad i = 1, 2, \ldots, m+n &
\end{array}$$

Dabei sind die a_j und b_j die unteren und oberen Grenzen des physikalisch interessierenden Bereiches für die Zustandsvariable x_j bzw. den Kontrollparameter p_{j-m}.

Um den interessierenden Bereich noch besser durch diesen Hyperquader eingrenzen zu können, ist manchmal noch eine Drehung der Koordinaten erforderlich (siehe Beispiel auf Seite 20).

Im folgenden wird davon ausgegangen, daß man die Grenzen a_j und b_j kennt (etwa aus numerischen Simulationen oder experimentellen Daten), und daß man das Differentialgleichungssystem gemäß (2.7) transformiert hat.

2.2.2 Numerisch-approximierende Methode

In den Hyperwürfel für die Anfangsbedingungen $\vec{\eta} = \vec{y}(t = t_0)$ läßt sich ein Gitter legen. Von jedem Gitterpunkt $\vec{\eta}_k$ startet man eine numerische Integration von $t = t_0$ bis $t = t_0 + T$. Das Problem, einen analytischen Näherungsausdruck für die Stroboskopabbildung (2.6) zu bekommen, reduziert sich jetzt auf die Approximation der erhaltenen Werte $\vec{S}(\vec{\eta}_k, t_0, T)$ durch glatte Funktionen [EKH⁺87], [KEHL88].

Dazu eignen sich insbesondere orthogonale Polynome wie die Tschebyscheff-Polynome und die Legendre-Polynome [BD79, S.91], [BS89, Kap.7.1.2.5], wobei die Tschebyscheff-Polynome auf die Minimierung der maximalen Abweichung abzielen, die Legendre-Polynome hingegen auf die Minimierung der mittleren quadratischen Abweichung. Der erste der beiden Approximationsansätze soll kurz dargestellt werden.

Tschebyscheff-Approximation (Bestapproximation)

Die sog. Bestapproximation liefert folgenden Näherungsausdruck für eine eindimensionale Funktion $f(x), x \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \left(\sum_{j=1}^{r} c_j T_{j-1}(x)\right) - \frac{1}{2}c_1 \quad \text{mit} \qquad (2.8) \\ T_j(x) &= \cos(j \arccos x) \quad \text{und} \\ c_j &= \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x_k) T_{j-1}(x_k) \\ &= \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x_k) \cos\left(\frac{\pi(j-1)(k-\frac{1}{2})}{N}\right) \end{aligned}$$

Dabei sind als Abszissenwerte die sog. Tschebyscheff-Abszissen

$$x_k = \cos\frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi}{N}, \quad k = 1, 2, \ldots, N \qquad (2.9)$$

zu wählen. Der maximale Fehler ist hierbei kleiner als der dreifache maximale Fehler des sog. *Minimax*-Polynoms. Dieses Polynom stellt die optimale Approximation dar, ist aber sehr schwer auffindbar. Die Tschebyscheff-Approximation ist fast gleichwertig, aber wesentlich leichter zu bestimmen [PFTV86, S.149].

Anwendung zur Bestimmung einer zweidimensionalen Iterationsfunktion für den Helmholtz-Oszillator

Untersucht wurde zunächst ein Helmholtz-Oszillator in einem Koordinatensystem, das keine speziellen Symmetrien besitzt.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\mu x_2 - 0.65 x_1 + x_1^2 - 0.36667 + F(t) \\ F(t) &= -0.835\cos(\omega t) \end{aligned} \tag{2.10}$$

$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ist der Zustandsvektor, μ die Reibungskonstante, und $\omega = 0.806$ die Kreisfrequenz des Antriebs. Die Verschiebung um 0.36667 bewirkt nur eine Verlagerung des Attraktorschwerpunktes in die Nähe des Ursprungs.

Nachdem das Gebiet numerisch bestimmt wurde, das vom Attraktor der Schwingung mehr oder weniger dicht ausgefüllt wird, wurde eine Koordinatentransformation

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.8 \\ 0.8 & -0.8 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.15 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

vorgenommen, bei der eine zusätzliche Drehung bewirkt, daß diejenigen Gebiete des Phasenraums ausgeblendet werden, die zum Einzugsbereich des Attraktors bei $-\infty$ gehören.

Die stroboskopische Abbildung $\vec{S}(\vec{\eta}, 0, 2\pi/\omega)$ wurde an 11×11 Punkten des Gebietes $\{\vec{\eta} \mid -1 \leq \eta_1 \leq 1 \ \wedge -1 \ \leq \eta_2 \leq 1\}$ numerisch bestimmt und durch ein Polynom vom Grad (3,3) approximiert (Tabelle 2.2). Die maximale Abweichung dieser approximierten Abbildung $\vec{S}_a$ vom rein numerischen Ergebnis $\vec{S}_n$ ist verhältnismäßig klein, z.B. gilt für $T_0 = 2\pi/\omega$:

$$\Delta s = \max \frac{|\underline{S}_n(\underline{z}, 0, T_0) - \underline{S}_n(\underline{z}, 0, T_0)|}{s} < 4 \cdot 10^{-2} \tag{2.12}$$

mit

$$s = \frac{\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} |S_n(\vec{\eta}, 0, T_0)| d\eta_1 d\eta_2}{\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} d\eta_1 d\eta_2}$$

$$
\begin{array}{|lcl|}
\hline
S_1(x_1, x_2, T_0) & = & -0.333 + 0.488x_2 + 0.086x_2^2 - 0.035x_2^3 \\
 & & -0.425x_1 - 0.728x_1x_2 - 0.464x_1x_2^2 - 0.108x_1x_2^3 \\
 & & -0.166x_1^2 - 0.014x_1^2x_2 + 0.261x_1^2x_2^2 + 0.184x_1^2x_2^3 \\
 & & +0.611x_1^3 + 0.21x_1^3x_2 + 0.097x_1^3x_2^2 - 0.028x_1^3x_2^3 \\
\hline
S_2(x_1, x_2, T_0) & = & 1.043 + 0.231x_2 - 0.052x_2^2 - 0.022x_2^3 \\
 & & -0.201x_1 - 0.182x_1x_2 - 0.006x_1x_2^2 + 0.028x_1x_2^3 \\
 & & -0.2x_1^2 - 0.108x_1^2x_2 - 0.055x_1^2x_2^2 - 0.046x_1^2x_2^3 \\
 & & -0.088x_1^3 - 0.032x_1^3x_2 + 0.008x_1^3x_2^2 + 0.026x_1^3x_2^3 \\
\hline
\end{array}
$$

Tabelle 2.2: Stroboskopische Abbildung für den Helmholtz-Oszillator (2.10)

Bei Verwendung von Polynomen vom Grad (5,5) sinkt der maximale Fehler auf $\Delta s < 1.5 \cdot 10^{-3}$. Die chaotische Dynamik, die mit der approximierten Abbildung erhalten wird, stimmt gut mit den numerischen Ergebnissen überein, wie der Poincaré-Schnitt in Abb. 2.4 zeigt. Die numerische Integration [IMS84] über 1000 Oszillationen von $F(t)$ benötigte 6 CPU-sec auf einer CYBER 975, während für die Berechnung der approximierten Stroboskop-Abbildung inklusive einer 1000-maligen Iteration nur 0.88 CPU-sec benötigt wurden.

Die offensichtliche Korrelation von x_1 und x_2 läßt sich ausnützen, um von der angegebenen zweidimensionalen Iterationsfunktion zu einer eindimensionalen zu gelangen [KEHL92].

2.2.3 Iterativ-approximierende Methode

Eine Alternative zur numerischen Integration an vielen Gitterpunkten ist die analytische Durchführung numerischer Verfahren mit Hilfe von Computer-Algebra [EKH$^+$87, EHML87].

Als Beispiel soll hier das Euler-Verfahren betrachtet werden; andere Verfahren wie das Runge-Kutta-Vefahren lassen sich jedoch problemlos in die Programme einbauen. Das Prinzip wird beim Euler-Verfahren deutlicher.

Der Zeitschritt T, über den integriert werden soll, wird aufgeteilt in N_e Schritte der Größe $h = T/N_e$. Wenn N_e genügend groß ist, läßt sich der Differentialquotient in (2.7) in einen Differenzenquotienten umschreiben:

$$\dot{\vec{y}} \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = \vec{G}(\vec{y}, t) \tag{2.13}$$

Abbildung 2.4: Poincaré-Schnitt des Helmholtz-Oszillators (2.10) mit (2.11) für $\mu = 0.97$. Links: numerische Berechnung [IMS84]. Rechts: Berechnung mit einer zweidimensionalen Iterationsfunktion vom Grad (5,5)

Damit ergibt sich eine Iterationsvorschrift, die nun N_e mal hintereinander angewendet werden muß:

$$y(t+h) = y(t) + h \cdot \vec{G}(\vec{y}, t) \tag{2.14}$$

Ausgehend von $\vec{\eta} = \vec{y}(t = t_0)$ erhält man als Ergebnis die stroboskopische Abbildung $\vec{S}(\vec{\eta}, t_0, T)$.

Wenn die Funktion G nichtlinear ist, wächst der Grad des Polynoms für $y(t+h)$ exponentiell mit jeder Iteration an. Die einfachste Möglichkeit, diesem Problem zu begegnen, nämlich das Weglassen aller Potenzen über einem bestimmten Grad, hat beträchtliche Abweichungen zur Folge [Bes84].

Approximiert man stattdessen nach jedem Schritt (vgl. Abb. 2.5) das erhaltene Polynom durch eine Summe orthogonaler Polynome bis zu einem vorgegebenen Grad $\vec{r}$

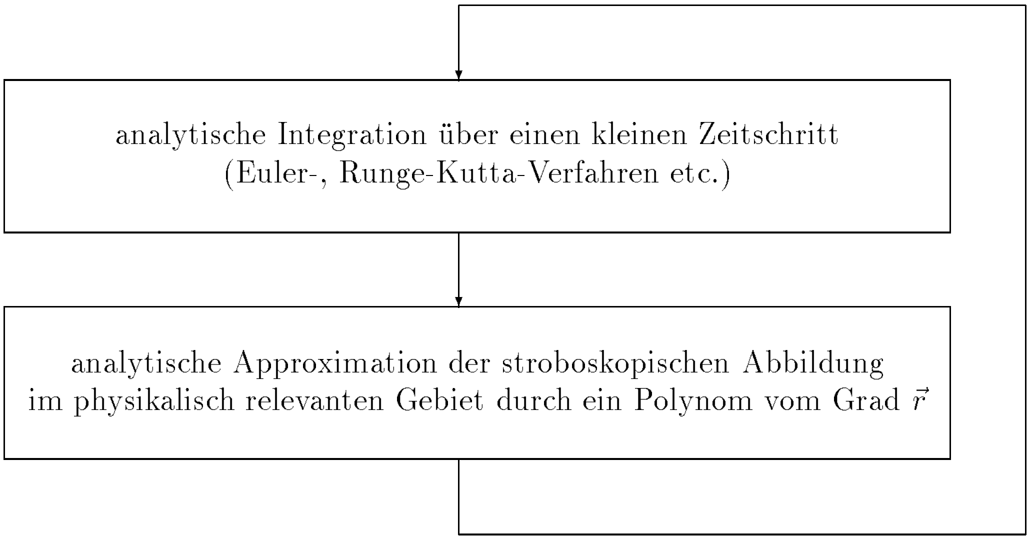


Abbildung 2.5: Schema zur iterativ-approximativen Berechnung einer analytischen Darstellung der Stroboskopabbildung einer gewöhnlichen, nichtlinearen Differentialgleichung

in den Anfangsbedingungen [1], bleibt der zusätzliche Verfahrensfehler in den meisten Fällen vernachlässigbar klein. Erst wenn die Stroboskopabbildung selbst so kompliziert wird, daß sie sich nicht mehr durch ein Polynom niedriger Ordnung beschreiben läßt, versagt auch dieses Verfahren. Während des Programmlaufes kann man dieses Versagen daran erkennen, daß die Koeffizienten der Terme höheren Grades plötzlich groß werden.

2.2.4 Analytische Lösung der Koeffizientendynamik

In Abb. 2.7 ist die Entwicklung der Koeffizienten der stroboskopischen Abbildung für den van der Pol-Oszillator über der Stroboskopierzeit T dargestellt. Wie man deutlich sieht, ist die Dynamik glatt. Es ist nun naheliegend, zu versuchen, die Dynamik der Koeffizienten direkt aus der Differentialgleichung zu berechnen. In der Tat führt das Einsetzen eines Polynomansatzes (2.6) in (2.2) zu einem analytisch lösbaren System für die Koeffizienten $c_{k;i_1,i_2,\dots,i_m}(\vec{p},t_0,T)$ [WEHL88].

Prinzipiell lassen sich durch die Lösung dieses Differentialgleichungssystems alle Koeffizienten berechnen, die für eine Approximation der stroboskopischen Abbildung bis zu einer vorgegebenen Genauigkeit notwendig sind. Die Berechnung von Koeffizienten höherer Ordnung ist jedoch sehr mühsam. Es zeigt sich jedoch, daß ausreichend gute Ergebnisse erzielt werden können, wenn man nur bestimmte nichtlineare Koeffizienten berechnet, die sog. wichtigen Moden. Dabei handelt es sich um diejenigen

---

[1] gemeint ist: Grad r_1 in η_1, Grad r_2 in η_2, etc.

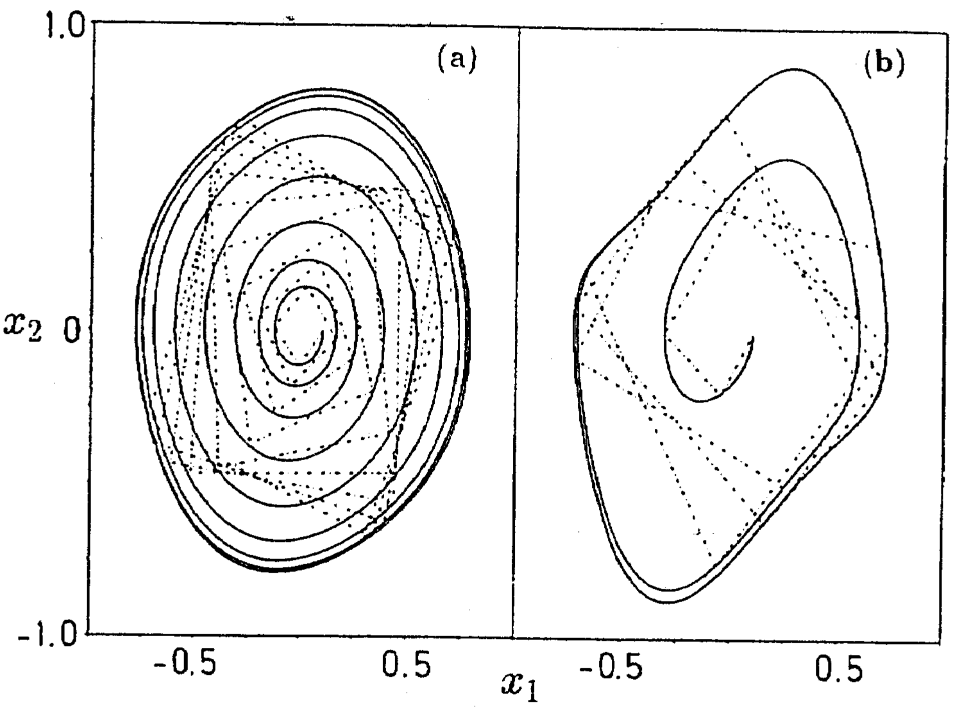


Abbildung 2.6: Trajektorien eines van der Pol-Oszillators $\dot{x}_1 = x_2$; $\dot{x}_2 = \varepsilon(0.25 - 2{x_1}^2)x_2 - x_1$. Durchgezogene Linie: Integration mit einem Runge-Kutta-Verfahren. Gestrichelte Linie: Verbindungslinie zwischen aufeinanderfolgenden Zuständen, berechnet von einer approximierten Stroboskopabbildung mit $T = 0.25$) mit $\vec{r} = (3,3)$ für $\epsilon = 0.5$ (**a**) bzw. $\vec{r} = (10,10)$ für $\epsilon = 3$ (**b**)

Nummer der Kurve im Bild	1	2	3	4
Indizes i_1, i_2	1,0	0,1	2,1	1,2

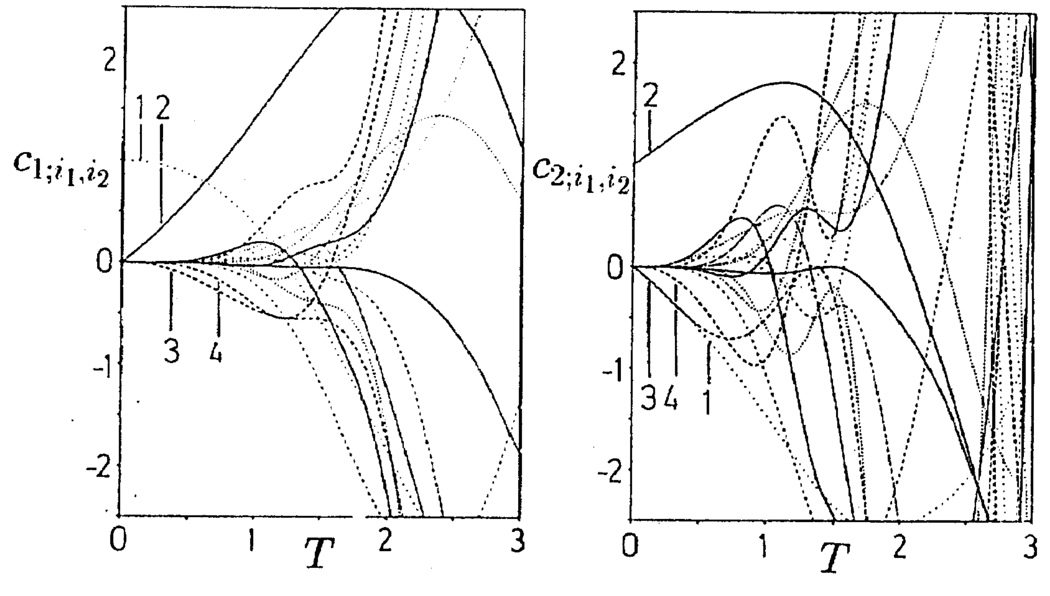


Abbildung 2.7: Dynamik der Koeffizienten der ersten (links) und zweiten (rechts) Komponente der stroboskopischen Abbildung für den van der Pol-Oszillator (1.1) für $\epsilon = 0.3$. Gezeichnet sind alle Koeffizienten $c_{k;i_1,i_2}(\epsilon = 0.3, t_0 = 0, T)$ der Polynom-Entwicklung (2.6) mit $i_1 = 0, 1, 2, 3$ und $i_2 = 0, 1, 2, 3$ als Funktion von T.

Koeffizienten, deren Indexvektor auch Indexvektor eines Termes im Flußvektorfeld ist. Um eine weitere Genauigkeitssteigerung zu erreichen, kann man anstatt der Berechnung weiterer Koeffizienten auch den Restterm abschätzen, der beim Einsetzen einer Entwicklung der Stroboskop-Abbildung bis inklusive der wichtigen Moden in die Differentialgleichung übrigbleibt [WHMK92].

Die beschriebene Methode ist erweiterbar, um aus partiellen Differentialgleichungen stroboskopische Operatoren analytisch zu ermitteln [REL89, Rüc89].

Abschließende Bemerkung zur Berechnung stroboskopischer Abbildungen

Die Abschnitte 2.2.2 bis 2.2.4 zeigten drei Methoden, die die Berechnung der Koeffizienten von Polynomentwicklungen zulassen. Die entscheidende Annahme, daß die stroboskopische Abbildung sich überhaupt mit einer Potenzreihe mit wenigen nichtverschwindenden Koeffizienten approximieren läßt, wird durch den Erfolg der Methode bei klassischen Testsystemen wie dem Helmholtz- oder dem van der Pol-Oszillator gestützt.

2.3 Berechnung von Poincaré-Abbildungen durch Normalzeittransformationen

2.3.1 Ermittlung der Winkelgeschwindigkeit einer Trajektorie

Stroboskopische Abbildungen sind ihrer Natur nach gut geeignet für Systeme, die einen festen Zeittakt besitzen. Dazu gehören sowohl angetriebene Systeme (Helmholtz-, Duffing-Oszillator), als auch Systeme mit konstanter Oszillationsdauer, wie etwa der von Guckenheimer und Holmes [GH83, S.23] angegebene Oszillator:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y - x(x^2+y^2) \\ x + y - y(x^2+y^2) \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

Für dieses System läßt sich leicht sowohl eine stroboskopische als auch eine Poincaré-Abbildung berechnen, indem man (2.15) auf Polarkoordinaten (r, Θ) transformiert [SK89]:

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\Theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(1-r^2) \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

Die stroboskopische Abbildung ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} S_\rho(\rho_0, \Theta_0, T) &= \left(1 + (\frac{1}{\rho^2} - 1)e^{-2t}\right)^{-1/2} && (2.17) \\ S_\Theta(\rho_0, \Theta_0, T) &= (T + \Theta_0) \bmod 2\pi && (2.18) \end{aligned}$$

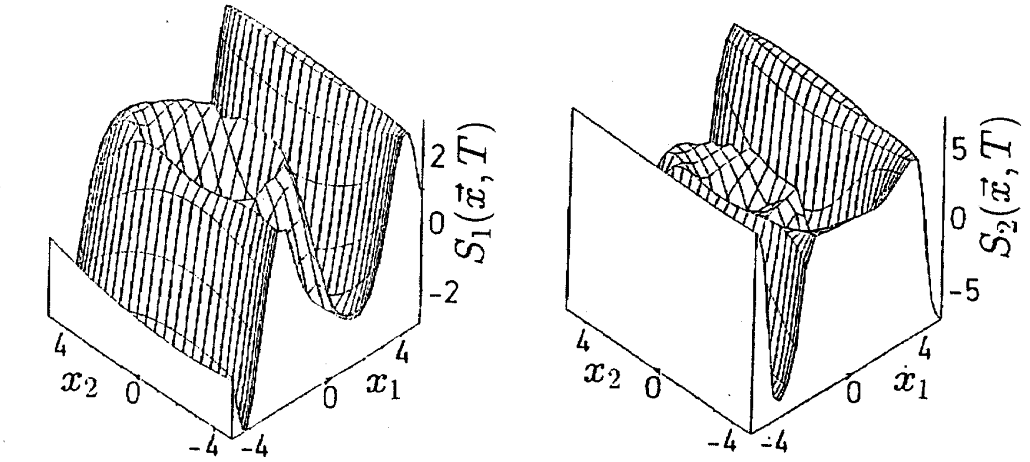


Abbildung 2.8: Numerisch berechnete stroboskopische Abbildungen für den van der Pol-artigen Oszillator (2.20) für $T = 0.67 \cdot 2\pi$. Diese Wahl von T entpricht etwa einem Umlauf auf dem Grenzzyklus.

Wählen wir als Poincaré-Schnitt $(x > 0, y = 0)$ bzw. $\Theta = 0$, so ist die Wiederkehrzeit konstant 2π, und die Poincaré-Abbildung lautet:

$$P(\rho_0) = \left(1 + (\frac{1}{{\rho_0}^2} - 1)e^{-4\pi}\right)^{-1/2} \tag{2.19}$$

Offensichtlich hat (2.19) einen Fixpunkt bei $\rho_0 = 1$. Dies entspricht dem Grenzzyklus des zugehörigen kontinuierlichen Systems (2.15). Deutlich sieht man hier den Nutzen der Poincaré-Abbildung: Die komplizierte Analyse eines Grenzzyklus reduziert sich auf die Analyse eines Fixpunkts einer Abbildung.

Das System (2.15) wurde offensichtlich so konstruiert, daß die Winkelgeschwindigkeit der Oszillation um den Ursprung der (x_1, x_2)-Ebene konstant ist. Dies ist untypisch für nichtlineare Systeme. Vielmehr ist die Amplituden-Frequenzkopplung einer der wesentlichen und typischen Effekte der Nichtlinearität der Differentialgleichung [NM79, S.54].

Dieser Effekt führt auch dazu, daß stroboskopische Abbildungen für autonome, stark nichtlineare Systeme sich extrem schlecht durch Potenzreihen niedriger Ordnung approximieren lassen. Als Beispiel diene hierzu ein van der Pol-artiger Oszillator mit kubischer Nichtlinearität:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -{x_1}^3 + 0.1(1 - {x_1}^2)x_2 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Numerisch berechnete grafische Darstellungen der stroboskopischen Abbildung von (2.20) (Abb. 2.8) zeigen, daß eine Approximation durch ein Polynom nicht effektiv ist. Die Abbildung beinhaltet Anfangswerte in der Nähe des Ursprungs, wo die Winkelgeschwindigkeit sehr klein ist, und Anfangswerte auf dem Grenzzyklus, wo die Trajektorien schneller vorankommen. Eine Möglichkeit wäre nun, verschiedene getrennte Polynomapproximationen zu versuchen, je eine für die verschiedenen Winkelgeschwindigkeitsbereiche. Da man aber an einer Darstellung *einer* Abbildung für den gesamten Einschwingvorgang interessiert ist, erscheint es sinnvoller, das Problem der Amplituden-Frequenz-Kopplung an der Wurzel zu packen.

Zunächst läßt sich die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ der Oszillation der Trajektorie um den Ursprung in der (x_1, x_2)-Ebene immer berechnen: Wenn $\varphi = \arctan(x_2/x_1)$ der Winkel des Ortsvektors eines Zustands gegenüber der x_1-Achse ist, erhält man durch Differenzieren nach der Zeit:

$$\dot{\varphi} = \frac{x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1}{{x_1}^2 + {x_2}^2} = \frac{x_1 F_2 - x_2 F_1}{{x_1}^2 + {x_2}^2} \tag{2.21}$$

Dabei sind $F_1 = \dot{x}_1$ und $F_2 = \dot{x}_2$ die entsprechenden Komponenten der Differentialgleichung (2.2). Mit der Kenntnis der Differentialgleichung ist also sofort die Winkelgeschwindigkeit als analytischer Ausdruck gegeben. Damit läßt sich auch gleich die Annahme, daß die Trajektorien den Ursprung umrunden, überprüfen: In diesem Fall darf $\dot{\varphi}$ an keinem Punkt des physikalisch relevanten Gebiets verschwinden. Bei höherdimensionalen Systemen kann man auf diese Weise zwei Koordinaten x_1 und x_2 so auswählen, daß die Trajektorien in der Projektion auf diese Ebene den Punkt $(x_1, x_2) = (0, 0)$ so umrunden, daß die Bedingung $\dot{\varphi} \neq 0$ erfüllt wird.

2.3.2 Elimination der Amplituden-Frequenz-Kopplung durch Normalzeittransformation

Da die Amplituden-Frequenz-Kopplung nun bekannt ist, kann man sie durch Einführung einer neuen Zeit

$$t' = \frac{t}{s} \quad \text{mit} \quad s = \left| \frac{\dot{\varphi}_S}{\dot{\varphi}} \right| \tag{2.22}$$

wegtransformieren. $\dot{\varphi}_S$ ist die Soll-Winkelgeschwindigkeit. Durch diese Transformation wird die Geometrie der Trajektorien nicht verändert, sondern nur deren Geschwindigkeit. Wählt man $\dot{\varphi}_S = 1$, sieht man leicht, daß die Winkelgeschwindigkeit nach der Transformation den Betrag eins erhält, weshalb diese Transformation **Normalzeittransformation** genannt wird.

Berechnet man für das transformierte System eine stroboskopische Abbildung mit $T' = 2\pi$, so erhält man wesentlich einfachere „Gebirge“ in der grafischen Darstellung.

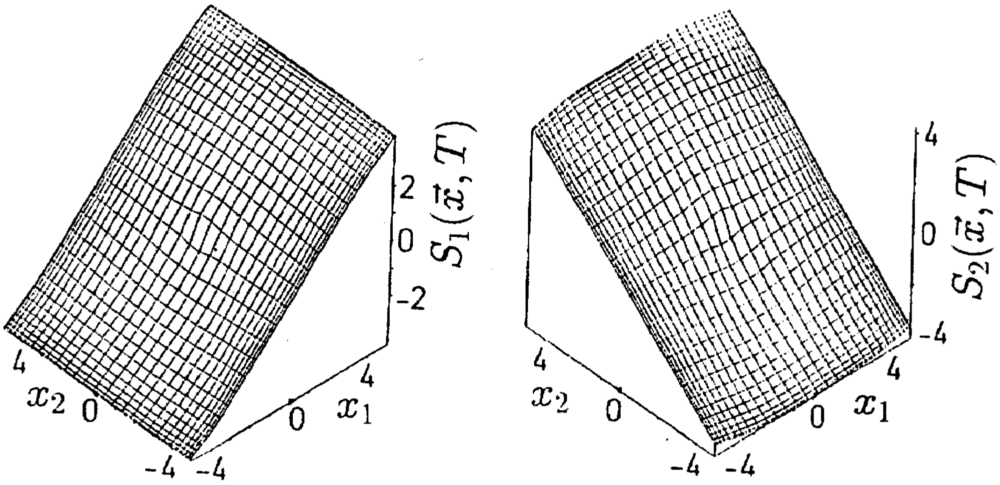


Abbildung 2.9: Numerisch berechnete stroboskopische Abbildungen für den van der Pol-artigen Oszillator (2.20) nach einer Normalzeittransformation für $T' = 2\pi$.

Auch die Approximation durch ein Polynom niedriger Ordnung gelingt nun mit guter Genauigkeit.

In der Zeit $T' = 2\pi$ umrunden die Trajektorien den Ursprung genau einmal. Startet man bei Anfangsbedingungen, für die $x_2 = 0$ gilt, so hat nach einer Oszillation x_2 wieder den Wert Null. Auch für alle anderen möglichen Startwinkel gilt, daß der Startwinkel nach $T' = 2\pi$ wieder erreicht wird. Das Verhältnis x_2/x_1 ist also invariant unter einer stroboskopischen Abbildung für das normalzeittransformierte System. Offensichtlich genügt es dann für die Charakterisierung des Langzeitverhaltens des Systems, die Entwicklung von x_1 *oder* x_2 zu untersuchen, weil sich die andere Variable sofort aus

$$d_p := \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2(t=0)}{x_1(t=0)} = const. \tag{2.23}$$

ermitteln läßt. Daraus folgt:

Die Stroboskop-Abbildung für $T' = 2\pi$ des normalzeittransformierten Systems ist eine Poincaré-Abbildung des ursprünglichen Systems.

Damit lassen sich die Methoden des letzten Abschnitts zur Berechnung von stroboskopischen Abbildungen auch zur Berechnung von Poincaré-Abbildungen nutzen.

2.3.3 Verbesserte Methoden zur Normalzeittransformation

Das Ziel der Normalzeittransformation ist die Ermittlung von Poincaré-Abbildungen. Dafür ist es nicht notwendig, daß die Winkelgeschwindigkeit der Trajektorie immer exakt $|\dot{\varphi}| = 1$ beträgt. Vielmehr genügt es, wenn die Wiederkehrzeit der Trajektorie zur Poincaré-Ebene konstant ist.

Diese Freiheit läßt zwei Verbesserungen gegenüber der Formel (2.22) zu. Zum einen ist es unschön, daß die Skalierungsfunktion im Ursprung unstetig ist, wenn der Ursprung ein Fixpunkt der Differentialgleichung ist. Diese Unstetigkeit kann man beheben [WEHL89], indem man als Soll-Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_S$ die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_H$ eines harmonischen, gedämpften Oszillators wählt:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\gamma x_2 - \omega^2 x_1 \\
\dot{\varphi}_H &= -\frac{{x_2}^2 + \gamma x_1 x_2 + \omega^2 {x_1}^2}{{x_1}^2 + {x_2}^2}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Für Systeme mit einem Fixpunkt am Ursprung ($\vec{F}(\vec{x} = \vec{0}) = \vec{0}$) mit stetig partiell differenzierbarem F ergibt sich als passende Wahl für γ und ω^2:

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \frac{1}{\zeta} \left.\frac{\partial F_2(\vec{x})}{\partial x_1}\right|_{\vec{x}=\vec{0}} \\
\gamma &= \frac{1}{\zeta} \left(\left.\frac{\partial F_2(\vec{x})}{\partial x_2}\right|_{\vec{x}=\vec{0}} - \left.\frac{\partial F_1(\vec{x})}{\partial x_1}\right|_{\vec{x}=\vec{0}} \right) \\
\zeta &= - \left.\frac{\partial F_1(\vec{x})}{\partial x_2}\right|_{\vec{x}=\vec{0}}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Die Poincaré-Abbildung ergibt sich dann als Stroboskop-Abbildung über die Schwingungsdauer des harmonischen, gedämpften Oszillators:

$$T' = 2\pi / \sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \tag{2.26}$$

Zum anderen kann man auch auf die exakte Formel für die Skalierungsfunktion s verzichten und statt dessen einen Näherungsausdruck bis zur 1.Ordnung verwenden[2]. Nach einer Integration über T' wird die Trajektorie die Poincaré-Ebene entweder knapp nicht erreichen oder etwas darüber hinausschießen. Wenn die Poincaré-Ebene so gewählt wird, daß das Trajektorienstück in der Nähe der Poincaré-Ebene gut durch einen Kreisbogen approximiert werden kann, läßt sich der entstandene Fehler

---

[2] Für Systeme mit schwacher Amplituden-Frequenz-Kopplung ergibt sich oft eine Konstante.

aber gut korrigieren. Die Parameter des Krümmungskreises sind durch die Differentialgleichung gegeben [BS89, Kap. 4.3.1.2].

O.B.d.A. soll als Poincaré-Ebene $x_2 = 0$ gewählt werden. Der korrigierte Zustandsvektor $\tilde{\vec{x}}(T')$ ergibt sich aus dem Zustandsvektor $\vec{x}(T')$, der mit einer genäherten Skalierungsfunktion berechnet wurde, wie folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(T') &= 0 \\ \tilde{x}_2(T') &= \eta_K + \sqrt{R_K^2 - \xi_K^2} \\ \tilde{x}_i(T') &= x_i(T') + x_1(T') \cdot \frac{F_i\left(\vec{x}(T')\right)}{F_1\left(\vec{x}(T')\right)} \quad \forall i = 3, \ldots, n \end{aligned} \tag{2.27}$$

Dabei sind R_K der Radius und (ξ_K, η_K) die Mittelpunktskoordinaten des Krümmungskreises:

$$\begin{aligned} R_K &= \frac{(\dot{x}_1{}^2 + \dot{x}_2{}^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}_1\ddot{x}_2 - \dot{x}_2\ddot{x}_1} \\ \xi_K &= x_1 - \frac{\dot{x}_2(\dot{x}_1{}^2 + \dot{x}_2{}^2)}{\dot{x}_1\ddot{x}_2 - \dot{x}_2\ddot{x}_1} \\ \eta_K &= x_2 + \frac{\dot{x}_1(\dot{x}_1{}^2 + \dot{x}_2{}^2)}{\dot{x}_1\ddot{x}_2 - \dot{x}_2\ddot{x}_1} \end{aligned}$$

Die durch die stroboskopische Abbildung gelieferte Werte für x_1 und x_2 werden ersetzt durch den Schnittpunkt des Krümmungskreises mit der x_2-Achse. Der Korrekturwert für die übrigen Koordinaten $x_i, \quad i = 3, \ldots, n$ ergibt sich aus dem Produkt des geschätzten Zeitfehlers $x_2/F_2(\vec{x}(T'))$ mit der entsprechenden Komponente des Flußvektors $F_i(\vec{x}(T'))$.

Diese Methode wurde mit Erfolg beim van der Pol-Oszillator angewendet [WEHL89] (vgl. Abb. 2.10). Die Approximation von s durch ein Polynom ermöglicht erstmals die vollanalytische Berechnung von Poincaré-Abbildungen, weil man damit zur Ermittlung der Stroboskop-Abbildung für $T' = 2\pi$ nun das vollanalytische Verfahren aus Abschnitt 2.2.4 verwenden kann. Die analytische Rechnung wird zweckmäßigerweise mit einem Computer-Algebra-System durchgeführt. Solche Systeme produzieren typischerweise recht umfangreiche Ausgaben, weil das Problem des Auffindens von Vereinfachungen eines Ausdrucks von den betreffenden Software-Herstellern noch nicht zufriedenstellend gelöst wurde. Die erhaltene Funktion soll deshalb auch hier nicht wiedergegeben werden. Sie findet sich aber im Fortran-Code in [Wan89].

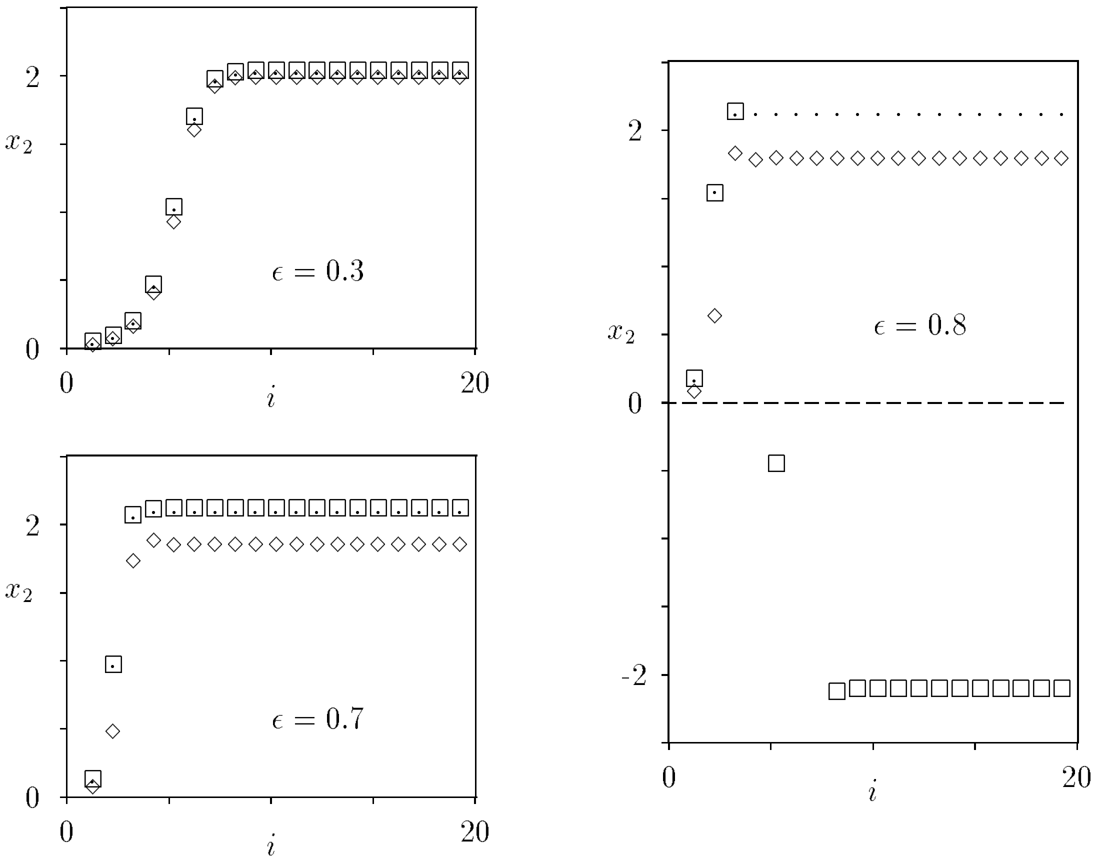


Abbildung 2.10: Einschwingverhalten des van der Pol-Oszillators (1.1) für drei verschiedene Werte von ϵ (im Bild jewils angegeben). Gezeichnet wurden jeweils die x_2-Werte nach Integrationsschritten über T, ausgehend von einem Startwert $(x_1, x_2) = (0, 0.01)$. Die Punkte geben die Ergebnisse bei Verwendung der exakten Transformation (2.22) mit $s = |\dot{\varphi}_H/\dot{\varphi}|$ aus (2.24) und T aus (2.26) an, die Quadrate bei Verwendung der Näherung $s = 1$, $T = 2\pi$ und Korrektur des Fehlers mit der Krümmungskreismethode (2.27). Die Rauten wurden durch mit der Näherung $s = 1$, $T = 2\pi$ und Korrektur des Fehlers durch Nullsetzen von x_1 nach jedem Schritt erhalten.
Offensichtlich ist die Krümmungskreismethode genauer als das schlichte Nullsetzen, jedoch kann die Korrektur überkritisch werden und ein falsches qualitatives Verhalten ergeben (rechtes Bild).

Kapitel 3

Asynchrone Zellularautomaten als Modelle für raum-zeitliche Dynamik

Die Dynamik von Systemen mit raum-zeitlicher Dynamik wird gerne mit zellulären Automaten simuliert. Dies erscheint vor allem bei nichtlinearen Vorgängen sinnvoll, weil bei der Simulation eines zellulären Automaten keine zusätzlichen Fehler auftreten. Alle möglichen Fehler werden beim Modellbildungsprozeß selbst gemacht. Die Güte des Modells läßt sich durch Vergleich der Simulationsergebnisse mit experimentellen Daten ermitteln. Für die Modellierung mit partiellen Differentialgleichungen gilt dies nicht, weil deren Lösung sowohl analytisch als auch numerisch kritisch ist.

Es soll zunächst das Konzept der zellulären Automaten erklärt werden, und dabei auch das neue Konzept der dosiert-asynchronen Steuerung. Danach werden Anwendungen in biologischen und chemischen Systemen mit dem Greenberg-Hastings-Modell sowie in der Geologie mit dem Schulz-Modell gezeigt.

3.1 Synchrone und asynchrone zelluläre Automaten

Ein zellulärer Automat ist ein Kristall aus Zellen, deren diskrete Zustände sich zeitlich verändern. Der Zustand im nächsten Zeitschritt ergibt sich durch eine deterministische Regel aus dem alten Zustand und dem Zustand der nächsten (evtl. auch übernächsten) Nachbarzellen. Eine Zelle verkörpert einen mesoskopischen Bereich eines physikalischen Gebietes. Alle Zellen sind gleich, evtl. mit Ausnahme von Randzellen.

Als Gittergeometrie verwendet man im allgemeinen quadratische oder hexagonale Gitter. Für das zweidimensionale, quadratische Gitter gibt es zwei gebräuchliche Nachbarschaftsdefinitionen: Die von Neumann-Nachbarschaft besteht nur aus den 4 nächsten Nachbarn, während die Moore-Nachbarschaft auch die 4 diagonalen Nachbarn miteinbezieht.

Mathematisch schreibt sich ein von Neumann-Zellularautomat wie folgt:

$$z_{j,k}(t_{i+1}) = f\left(z_{j,k}(t_i), z_{j+1,k}(t_i), z_{j-1,k}(t_i), z_{j,k+1}(t_i), z_{j,k-1}(t_i)\right) \tag{3.1}$$

Dabei sind die t_i diskrete Zeitpunkte. Die Indizes j und k bezeichnen den Ort der Zelle.

Bei der Simulation auf einem Rechner können nicht alle Zellen gleichzeitig berechnet werden. Vielmehr gliedert sich der gesamte Berechnungsprozeß in einen

- **Berechnungsschritt**, in dem die Funktion f berechnet wird, und einen
- **Aktualisierungsschritt**, in dem der Funktionswert als neuer Zustand der Zelle angenommen wird.

Durch diese Trennung wird sichergerstellt, daß sich ein Zellenzustand nicht während der Auswertung durch eine Nachbarzelle verändert. Die Reihenfolge der Berechnung ist beliebig, solange sie konstant bleibt. Dieses sequentielle Arbeiten kann man mit einem Warteschlangenmodell verdeutlichen:

Eine dosierte Asynchronität ergibt sich durch die Einführung eines Vordrängelbereiches (vgl. Abb. 3.1). Eine Zelle, die gerade abgearbeitet wurde, stellt sich nicht hinten an, sondern drängelt sich etwas vor. Die Zahl der Zellen, die sie überspringt, wird zufällig aus einem bestimmten Bereich ausgewählt. Die Zelle, deren Stelle durch die Vordrängelaktion besetzt wurde, muß sich hinten anstellen. Eine Definition einer dosierten Asynchronität ergibt sich direkt aus dem Verhältnis der Länge des Vordrängelbereiches zur Gesamtlänge der Schlange:

$$\alpha := \frac{\text{Länge des Vordrängelbereiches}}{\text{Gesamtzahl der Automatenzellen}} \tag{3.2}$$

Für einen kompletten Zyklus muß jede Zelle zweimal bearbeitet werden, einmal für den Berechnungs- und einmal für den Aktualisierungsschritt. Unter einem **Durchlauf** soll im folgenden eine Sequenz von $2N_z$ Schritten verstanden werden. Dies ist genau die Zahl, die im synchronen Fall für einen Zyklus benötigt wird.

Auf Parallelrechnern können asynchrone Verfahren von Vorteil sein, weil die Synchronisation der Einzelrechner Rechenleistung kostet. Die Idee von asynchronen Automaten wurde deshalb auch von anderen Autoren verfolgt (z.B. [IB84]). Diese Autoren stellten auch fest, daß einige der Strukturbildungseffekte bei zellulären Automaten Artefakte der synchronen Steuerung sind, andererseits mit der asynchronen Steuerung Strukturen entstehen, die nicht mit synchronen Automaten zu

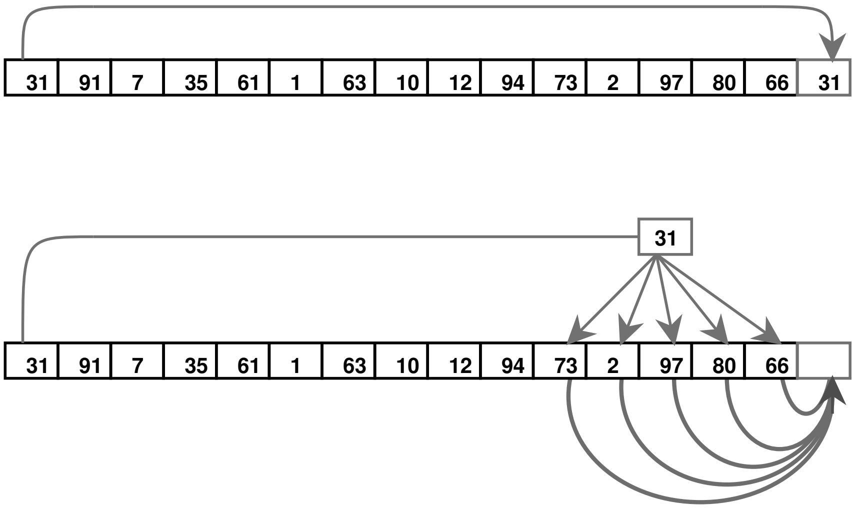


Abbildung 3.1: Zwei verschiedene Warteschlangenmodelle für Zellen eines Zellularautomaten. Die obere Schlange beschreibt die übliche sequentielle Bearbeitungsstrategie angewendet auf eine gemischte Schlange. Sie liefert die gleichen Resultate wie eine ungemischte Schlange, solange Berechnungs- und Aktualisierungsschritt strikt getrennt bleiben. Durch die Vordrängelmöglichkeit wie in der unteren Schlange ergibt sich eine ständige Weitermischung der Abarbeitungsreihenfolge.

modellieren waren. Bei den dort untersuchten Asynchronitätskonzepten ist nicht gewährleistet, daß alle Zellen im Mittel gleich oft bearbeitet werden. Dies erscheint jedoch notwendig und sinnvoll, wenn man raum-zeitliche Dynamik auf homogenen Medien simulieren will.

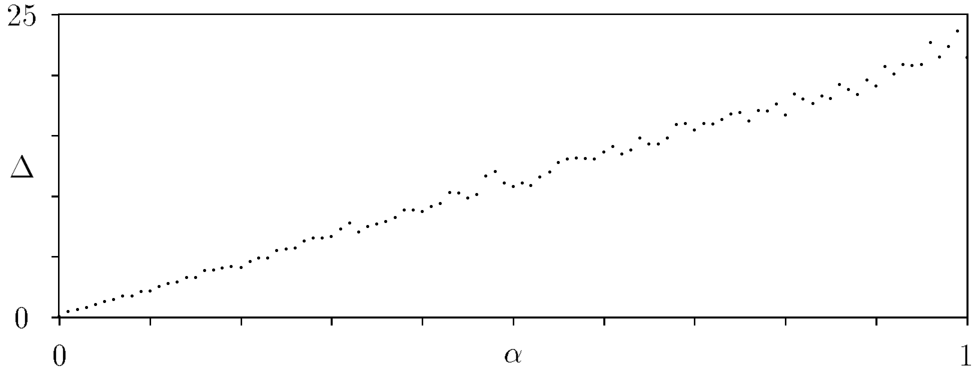


Abbildung 3.2: Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\frac{1}{400}\sum_{j=1}^{400}\left(N_a(j) - 500\right)^2}$ der Zahl der Aufrufe eines Automaten mit 400 Zellen nach 500 Durchläufen mit asynchroner Steuerung mit dem Warteschlangenmodell als Funktion von α (aus [Sch90a]).

Dieses Problem tritt beim Warteschlangenmodell nicht auf. Abb. 3.3 zeigt die Auf-

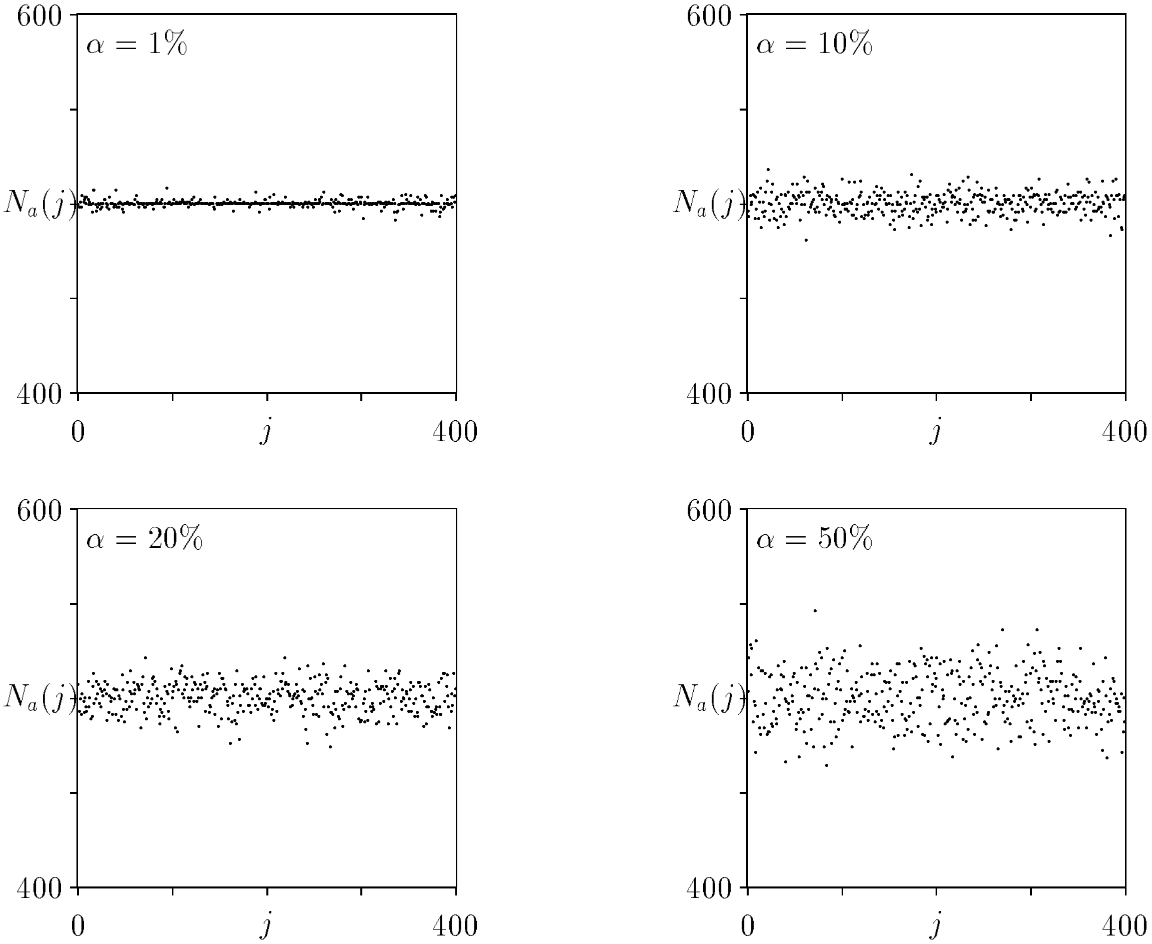


Abbildung 3.3: Zahl der Aufrufe $N_a(j)$ der Zelle j eines Automaten mit 400 Zellen nach 500 Durchläufen mit asynchroner Steuerung mit dem Warteschlangenmodell für vier verschiedene Werte von α

rufhäufigkeit $N_a(j)$ der Zellen nach 500 Durchläufen. Auch bei hohen Asynchronitäten streut die Zahl der Aufrufe nur in einem kleinen Intervall. Einen Überblick über die Streuung gibt Abb. 3.2.

3.2 Wirkung der Asynchronität auf die Geometrie der Lösung

Die Asynchronität bewirkt, daß Ecken tendenziell abgerundet werden. Das kann man so verstehen (vgl. Abb. 3.4): Durch die Asynchronität können Zellen innerhalb eines Durchlaufs zwei- oder mehrmals bearbeitet werden. Das bewirkt an einer Aktivierungsfront, daß die Zellen, die bei synchroner Steuerung erst im nächsten Durchlauf

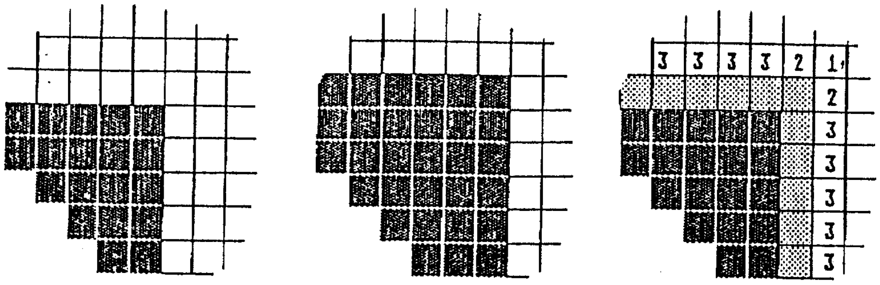


Abbildung 3.4: Zur Veranschaulichung der Wirkung der Asynchronität (nach [Sch90b]).

aktiv werden würden, nun mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit im gleichen Durchlauf aktiviert werden. Diese Beschleunigung wirkt sich genau dann aus, wenn sich eine Zelle direkt neben der Front vor eine Zelle drängelt, die zwei Reihen von der Front entfernt ist. Dadurch breitet sich die Front im asynchronen Fall auch etwas schneller aus als im synchronen (vgl. Abb. 3.10). Die Zahl der Front-Nachbar-Zellen, die diese Beschleunigung vermitteln können, ist aber in einer Ecke geringer als an einer geraden Front. Die Ecke bleibt hinter der restlichen Front zurück, wodurch sie verschwindet.

Die Bevorzugung runderer Lösungen soll nun quantifiziert werden. Dazu definiert man ein Maß für die Unrundheit einer Front von Zellen mit dem Zustand z_F für Erregungswellen, die von einem Zentrum (j_0, k_0) ausgehen:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\left(d_{jk}-\overline{d}\right)\delta_{z_{jk},z_F} \qquad (3.3) \\ d_{jk} &= \sqrt{(j-j_0)^2-(k-k_0^2)} \\ \overline{d} &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N_x}\sum_{k=1}^{N_y} d_{jk}\delta_{z_{jk},z_F} \\ N &= \sum_{j=1}^{N_x}\sum_{k=1}^{N_y}\delta_{z_{jk},z_F} \end{aligned}$$

Die Ergebnisse für ein Epidemie-Modell zeigt Abb. 3.9. Schon für kleine Asynchronitäten sinkt die Unrundheit deutlich. Sie verschwindet für höhere Asynchronitäten nicht, weil dann die stochastischen Effekte überwiegen und die Front rauher wird. Mithin wird der Abhängigkeit der Lösungsgeometrie von der Gittergeometrie geringer (Abb. 3.7 und 3.8).

3.3 Das Greenberg-Hastings-Modell

Dieses vielseitig einsetzbare Modell [TH88] besteht aus Zellen mit wenigen Zuständen N_z. Ein Zustand davon heißt aktivierbar, einer aktiv, und die anderen refraktär. Ist in der Nachbarschaft einer aktivierbaren Zelle eine aktive Zelle, wird die Zelle im nächsten Zeitschritt selbst aktiv. In den folgenden Zeitschritten durchläuft die Zelle nacheinander alle refraktären Zustände:

$$z_{jk}(t_{i+1}) = \begin{cases} z_{jk}(t) - 1 & \text{wenn } z_{jk}(t) \geq 1 \\ N_z & \text{wenn } z_{jk}(t) = 0 \wedge (z_{j\pm 1k}(t) = N_z \vee z_{jk\pm 1}(t) = N_z) \\ 0 & \text{wenn } z_{jk}(t) = 0 \text{ keine aktiven Nachbarn hat} \end{cases} \tag{3.4}$$

Hier ist der Zustand mit der Nummer 0 aktivierbar, der mit der Nummer N_z aktiv, und die anderen $\{N_z, N_z - 1, \ldots, 1\}$ refraktär.

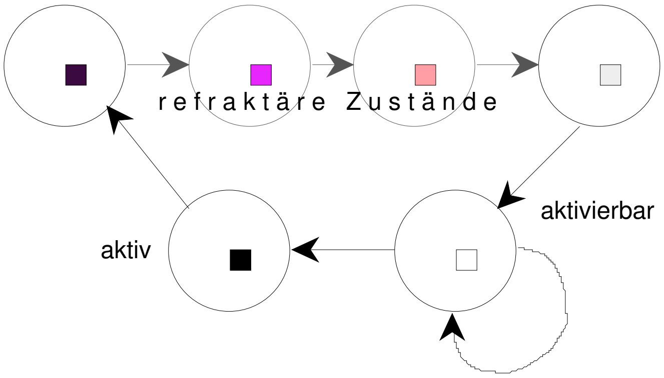


Abbildung 3.5: Zustandsdiagramm des Greenberg-Hastings-Modells

Anwendungen dieses Modells findet man u.a. bei

- katalytischer Oxidation von CO an Pt-Oberflächen [MWEE86]
- Waldbrand-Modellen [BCT90]
- Epidemie-Ausbreitungsmodellen [Sch89a]
- Modellen für die BZ-Reaktion [Win74]
- Neuronenaktivitäten [Möl90]

Abbildung 3.6: Bildung von Spiralwellen bei der Belousov-Zhabotinskij-Reaktion (aus [Win74])

Beispiel: ein Epidemie-Modell

Am Beispiel eines Epidemie-Modells mit $N_z = 10$ soll die Wirkung der Asynchronität auf die Geometrie der Lösung veranschaulicht werden. Als Anfangsbedingung wird ein Streifen aktiver Zellen ($N_z = 10$) neben einem Streifen maximal refraktärer Zellen ($N_z = 9$) gewählt. Alle übrigen Zellen sind im aktivierbaren Zustand.

Die Abbildungen 3.7 und 3.8 zeigen die Entwicklung auf einem quadratischen und einem hexagonalen Gitter. Es bilden sich regelmäßige quadratische oder hexagonale Strukturen. Diese offensichtliche Diskrepanz zu den realen Mustern wie in Abb. 3.6 kann durch Verwendung schwach asynchroner Steuerung vermieden werden. Gleichzeitig entstehen weniger glatte Ränder. Der Einfluß der Gittergeometrie ist nun wesentlich schwächer.

Zur Bestimmung der Unrundheit verwendet man eine Anfangsbedingung mit einer einzelnen aktiven Zelle in der linken, unteren Ecke des Feldes. Die Erregung breitet sich nach oben und rechts aus, bis sie schließlich das Zellengebiet verläßt.

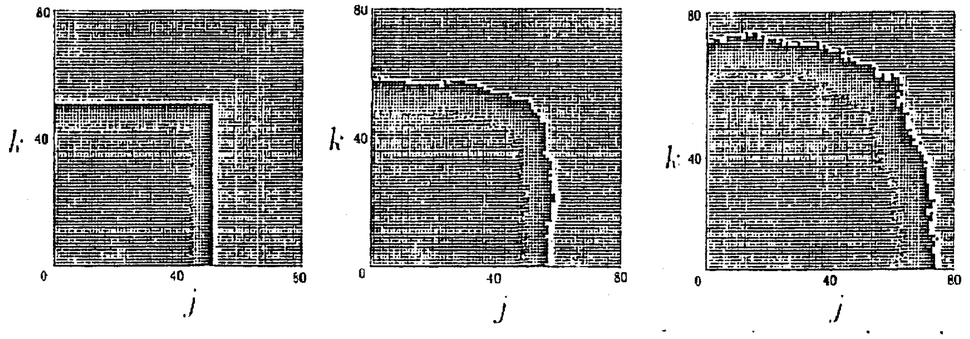


Abbildung 3.7: Entwicklung von Epidemien, ausgehend von einer einzelnen aktiven Zelle in der linken unteren Ecke eines quadratischen Gebietes mit Moore-Nachbarschaft. Gezeichnet sind nebeneinander jeweils der Zustände nach 50 Durchläufen (aus [Sch90a]). Die Größe des Punktes in der Mitte der Zelle ist proportional zum Zustandswert z_{jk} der Zelle. Links: $\alpha = 0$. Mitte: $\alpha = 2\%$. Rechts: $\alpha = 20\%$.

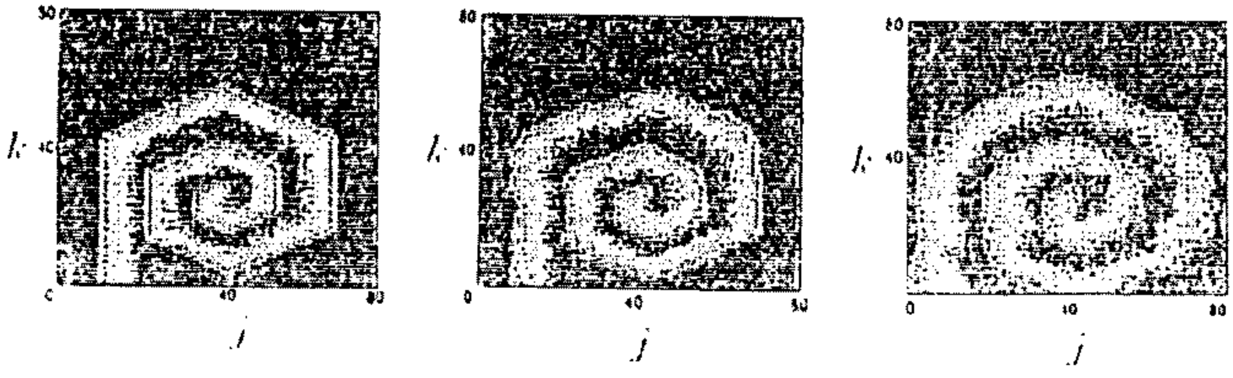


Abbildung 3.8: Entwicklung von Epidemien auf einem hexagonalen Gitter, ausgehend von einem Streifen aktiver Zellen neben einem Streifen refraktärer Zellen. Gezeichnet sind nebeneinander jeweils der Zustände nach 28 Durchläufen (aus [Sch90a]). Links: $\alpha = 0$. Mitte: $\alpha = 2\%$. Rechts: $\alpha = 20\%$.

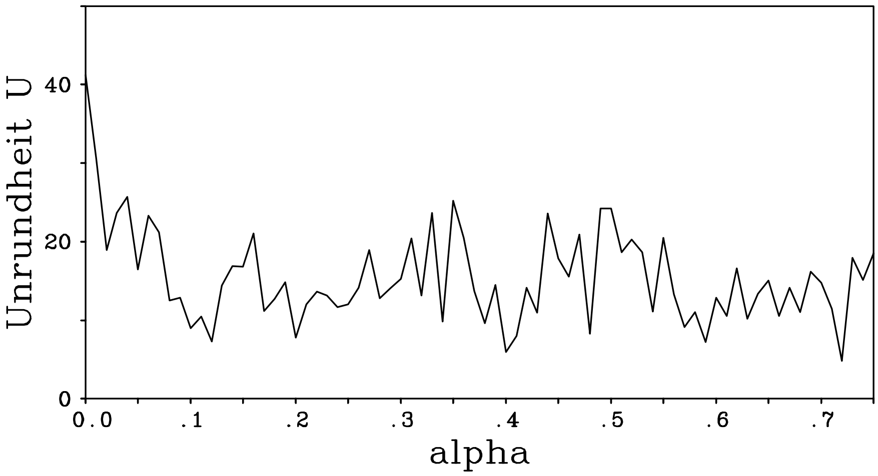


Abbildung 3.9: Unrundheit U (3.3) der Front der aktiven Zellen in einem Epidemie-Modell mit $N_z = 10$ als Funktion der Asynchronität α

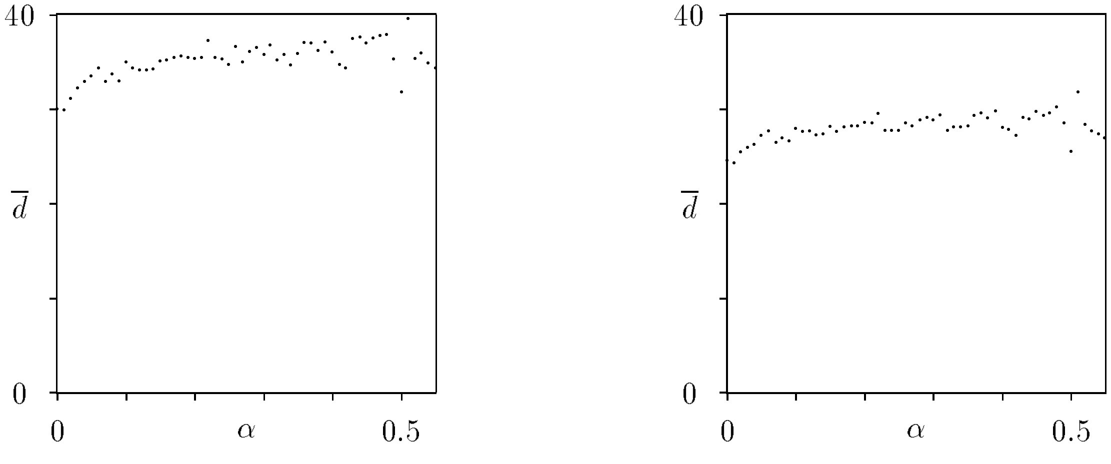


Abbildung 3.10: Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Aktivierungsfront beim Epidemie-Modell mit $N_z = 10$ als Funktion der Asynchronität α. Gestartet wurde mit einer punktförmigen Erregung in linken unteren Ecke $(j_0, k_0) = (0, 0)$ eines quadratischen 60×60-Feldes. Aufgetragen ist jeweils der mittlere Abstand $\overline{d}$ der aktiven Zellen $(z_{jk} = N_z)$ von der Mitte des Feldes nach 30 Durchläufen. Im linken Bild wurde der Abstand einer Zelle von der Mitte mit der euklidischen Norm $d_{jk} = \sqrt{(j - j_0)^2 + (k - k_0)^2}$ berechnet, im rechten Bild mit der 1-Norm $d_{jk} = |j - j_0| + |k - k_0|$

3.4 Modellierung von Erosion mit dem Schulz-Modell

Der Einsatz der asynchronen Simulation ist dann besonders effektiv, wenn ein zellulärer Automat vorliegt, dessen Regeln aus der Anschauung für ein quadratisches Gitter abgeleitet wurden und der nun eine gitterunabhängige Lösungsgeometrie zeigen soll. Genau dieses Problem tauchte bei der Simulation der Entstehung dendritischer Flußstrukturen auf [SKL90]. Das reale Experiment wurde in unserer Gruppe durchgeführt [WKHL91]. Es handelte sich dabei um einen runden Sandtrog mit einem zentralen Abfluß. Die Sandoberfläche wurde am Rand gleichmäßig bewässert.

Modelliert werden im wesentlichen die folgenden zwei Effekte:

- der Abfluß von Wasser
- das Mitreißen von Sandkörnern durch Wasser

Dazu dienen folgenden Automatenregeln für die inneren Zellen[1] eines zellulären Automaten auf einem quadratischen Gitter mit Moore-Nachbarschaft:

$$\begin{aligned}
z_{jk}(t_i) &= (W_{jk}(t_i), S_{jk}(t_i)) \\
W_{jk}(t_{i+1}) &= \begin{cases} W_{jk}(t_i) & \text{falls} \quad U_S = \emptyset \wedge U_W = \emptyset \\ 0 & \text{falls} \quad U_S \neq \emptyset \\ \frac{1}{2}(W_{U_W}(t_i) + W_{jk}(t_i)) & \text{falls} \quad U_S = \emptyset \wedge U_W \neq \emptyset \end{cases} \\
S_{jk}(t_{i+1}) &= \begin{cases} S_{jk}(t_i) - 1 & \text{falls} \quad U_S \neq \emptyset \wedge \text{ZUF} \\ S_{jk}(t_i) & \text{sonst} \end{cases} \\
&\text{wenn} \quad U_S \neq \emptyset, \text{ dann:} \\
W_{U_S}(t_{i+1}) &= \frac{1}{2}(W_{U_S}(t_i) + W_{jk}(t_i)) \\
&\text{wenn} \quad U_S = \emptyset \wedge U_W \neq \emptyset, \text{ dann:} \\
W_{U_W}(t_{i+1}) &= \frac{1}{2}(W_{U_W}(t_i) + W_{jk}(t_i)) \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Dabei ist W_{jk} der Wasserstand in der Zelle jk, S_{jk} die Sandhöhe, U_S die ausgedünnte Menge der Nachbarn mit den niedrigsten Sandpegeln und U_W die ausgedünnte Menge der Nachbarn mit den niedrigsten Wasserständen. Befindet sich in den Mengen mehr als ein Element, wird zufällig eines ausgewählt. Die Mengen werden ausgedünnt, indem nur die Zellen mit dem niedrigsten Pegel in der Menge bleiben. Davon wird ein Element zufällig ausgewählt, wenn mehrere Nachbarzellen den gleichen niedrigen Pegelstand haben. ZUF ist ein Zufallsereignis, dessen Eintrittswahrscheinlichkeit zum aktuellen Pegelstand $W_{jk}(t_i)$ proportional ist.

Eine bildliche Veranschaulichung der Automatenregeln zeigt Abb. 3.11.

---

[1] Die Randzellen können extra beregnet werden. Darauf soll aber hier nicht eingegangen werden.

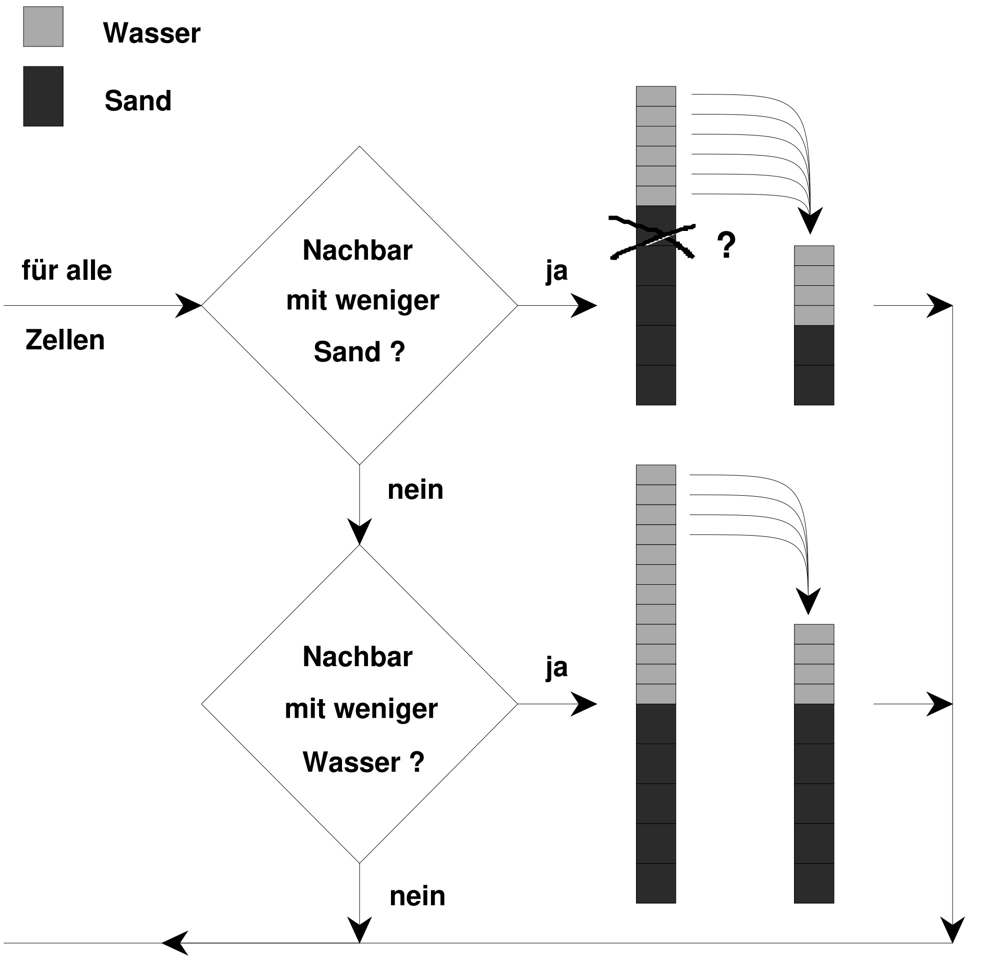


Abbildung 3.11: Bildliche, einfache Darstellung der Automatenregeln (3.5) des Schulz-Modells (aus [Sch90b])

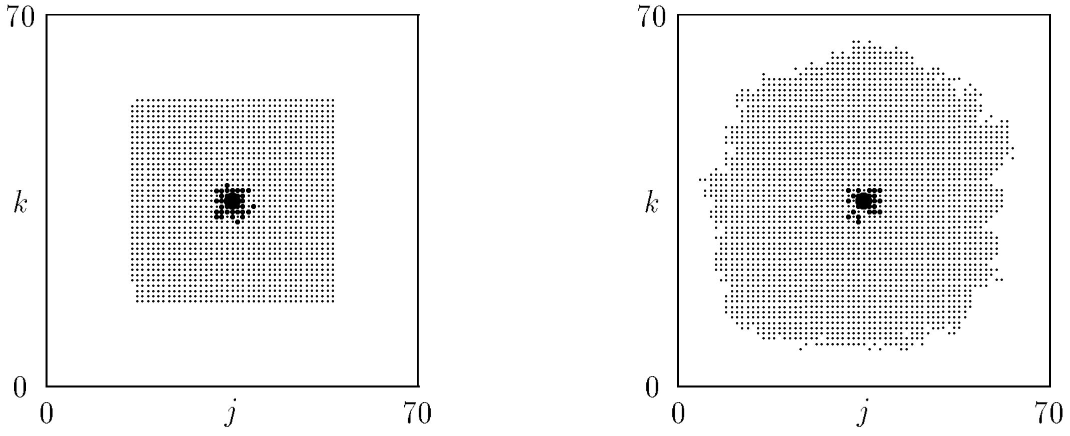


Abbildung 3.12: Simulation der Erosion einer Sandschicht in einem Trog mit zentralem Abfluß durch das darüber geschichtete, schnell abfließende Wasser mit einem Zellularautomaten (3.5). Die Punktgröße gibt das Höhenniveau an. Links: synchrone Simulation. Rechts: asynchrone Simulation mit $\alpha = 50\%$. Daten wie in ([Sch90b, S.65]), jedoch mit einem LaTeX-Plot-Programm aufbereitet.

Dieser Automat ist in dieser Formulierung bereits stochastischer Natur. Für bestimmte Parameterwerte (hohe Abflußrate) spielt dieser Einfluß jedoch eine geringe Rolle, so daß sich die Erosionsfront ähnlich wie die Erregungsfront im Greenberg-Hastings-Modell ausbreitet. Die entstehenden Strukturen zeigt Abb. 3.12. Die unrealistischen Gittereffekte werden durch Einführung einer Asynchronität von 50% vermieden.

Kapitel 4

Ermittlung von Abbildungen aus Zeitreihen

Wie in Kapitel 1 deutlich geworden ist, besteht ein Hauptproblem bei der Behandlung nichtlinearer Dynamik im Auffinden von effektiven Modellen. Falls die Dynamik nicht schon als Differentialgleichung vorliegt, ist es zweckmäßiger, den Umweg über die kontinuierliche Darstellung zu vermeiden und stattdessen zu versuchen, eine Abbildung direkt aus den gemessenen Daten zu erhalten.

In Kapitel 2 wurde bereits erläutert, daß Abbildungen in der Regel effektiver zur Vorhersage oder Steuerung genutzt werden können als Differentialgleichungen.

Die Bestimmung von unbekannten Parametern eines Modells erfolgt grundsätzlich in zwei Schritten. Zunächst überlegt man sich, wie man die Güte eines Modells als Funktion der unbekannten Parameter mathematisch fassen kann. Danach sucht man dasjenige Modell mit der maximalen Güte. Letztendlich muß also ein Optimierungsproblem gelöst werden.

4.1 Ermittlung geeigneter Qualitätsfunktionen

Die grundlegende Idee, die den Verfahren zur Ermittlung niederdimensionaler Modelle aus experimentellen Datensätzen zugrundeliegt, ist die Aufteilung der komplexen Dynamik der Meßwerte in einen deterministischen Anteil und einen stochastischen. Letzterer soll die Einflüsse von zufälligen Meßfehlern („Meßrauschen“) und nicht ganz versklavten Freiheitsgraden des Systems („Systemrauschen“) aufnehmen und es damit ermöglichen, daß der deterministische Anteil nicht zu kompliziert wird.

Gegeben sei eine große Zahl N von Meßwerten $\vec{x}_i, i = 1, \ldots, N$ einer Zeitreihe. Dabei seien die $\vec{x}_i$ entweder stroboskopisch ($t_i = i \cdot T$) oder im Sinne einer Poincaré-

Abbildung geeignet getriggert aufgenommen. Durch ein Verfahren sind diejenigen Parameter $\vec{p}$ und $\vec{q}$ eines Modells

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{f}(\vec{x}_i, \vec{p}) + \vec{\hat{R}}(\vec{q}) \tag{4.1}$$

so zu bestimmen, daß diese Funktion ein optimales Modell für die Dynamik von $\vec{x}$ ist. Dabei stellt die Funktion $\vec{f}$ den deterministischen Anteil der Modelldynamik dar. $\vec{\hat{R}}(\vec{q})$ ist der Rauschanteil, der mit den Zahlen $q_1, q_2, \ldots, q_r$ beschrieben werden soll.

4.1.1 Least-Square-Fit

Wenn vor allem der Aspekt der Steuerung im Vordergrund steht, erhält man ohne Berücksichtigung der Natur des Rauschens die Forderung [CKHJ90]:

$$-Q_l = \sum_{i=1}^{N-1} \|\vec{f}(x_i, \vec{p}) - \vec{x}_{i+1}\|^2 \rightarrow \text{Min !} \tag{4.2}$$

Daraus ergeben sich die optimalen Parameter $\vec{p}$. Diese Wahl der Qualitätsfunktion Q_l liefert einen sog. Least-Square-Fit. Diese Methode sagt weder etwas über die Natur des Rauschanteils aus, noch ist sie geeignet, sichere Aussagen über das Langzeitverhalten der Dynamik zu machen, weil die Parameter, die vor allem die Langzeitdynamik charakterisieren (z.B. Dämpfungsparameter) mit dieser Methode im allgemeinen nur sehr ungenau ermittelt werden können [Kun91].

4.1.2 Langzeitvorhersagen

Die Forderung, daß das Modell (4.1) auch für eine Vorhersage über längere Zeiten gut sein soll, kann man im Sinne eines Least-Square-Fits folgendermaßen formulieren:

$$\sum_{i=1}^{N-r} \|\vec{f}^{\,r}(x_i, \vec{p}) - \vec{x}_{i+r}\|^2 \rightarrow \text{Min !} \tag{4.3}$$

Hier wird das Modell für den r-fachen Zeitschritt optimiert ($f^2(x_i, \vec{p}) := f(f(x_i, \vec{p}), \vec{p})$ usw.).

Als Ansatz für die Funktion f bietet sich zum Beispiel ein Euler-Schritt einer Modell-Differentialgleichung der Dynamik mit unbestimmten Koeffizienten $\vec{p}$ an. Eine kompakte Darstellung von f^r für große r erhält man durch analytische Berechnung der stroboskopischen Abbildung (vgl. Kapitel 2.2, Beispiel in Kapitel 6).

Um eine Gütefunktion zu erhalten, die ein auf mehreren Zeitskalen gutes Modell liefert, addiert man mehrere Terme der Form (4.3) für verschiedene r.

Die Frage ist, wie man die Terme für die unterschiedlichen Zeitschritte wichten soll. Bei chaotischen Systemen ist es einleuchtend, daß längere Korrelationen nicht berücksichtigt werden können. Andererseits ist man bei periodischen Systemen gerade am Langzeitverhalten interessiert. Im Stadium der Modellbildung läßt sich aber — vor allem bei relativ hohem Rauschanteil — die Frage schlecht entscheiden, ob das System chaotisch ist oder nicht.

Eine Möglichkeit besteht darin, den größten Lyapunov-Exponenten abzuschätzen, etwa mit der Methode von [BBA90]. Einen allgemeineren Zugang erhält man jedoch durch die konsequente Anwendung statistischer Methoden.

4.1.3 Die Maximum-Likelihood-Methode ohne Langzeitterme

Wird die Dynamik von vornherein als statistischer Prozeß mit deterministischem Anteil aufgefaßt, besteht die Modellierung aus der Angabe einer Übergangswahrscheinlichkeit von einem Zustand $\vec{x}_i$ zu einem Zustand $\vec{x}_{i+1}$:

$$\Theta(\vec{x}_i, \vec{x}_{i+1}, \vec{p}, \vec{q}) = R(\vec{f}(\vec{x}_i, \vec{p}) - \vec{x}_{i+1}, \vec{q}) = R(\vec{\varepsilon}_i, \vec{q}) \tag{4.4}$$

Dabei wurde die Abkürzung $\vec{\varepsilon}_i := \vec{f}(\vec{x}_i, \vec{p}) - \vec{x}_{i+1}$ für den Differenzvektor zwischen der Vorhersage des $i+1$-ten Werts aus dem i-ten, und dem wirklichen $i+1$-ten Meßwert eingeführt. Für das Beispiel normalverteilten Rauschens hat $R(\vec{\varepsilon}_i, \vec{q})$ mit $q_j = 1/\sigma_j$ die Form:

$$R_g(\vec{\varepsilon}_i, \vec{q}) = \frac{1}{N(\vec{q})} \exp\left(\|\vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{q}\|^2\right) \tag{4.5}$$

$N(\vec{q})$ muß wie üblich so gewählt werden, daß das Integral über alle möglichen Werte $\vec{\varepsilon}_i$ eins ergibt. R_g ist offensichtlich eine auf mehrere Dimensionen verallgemeinerte Gauß'sche Glockenkurve.

Aus dem Modellansatz für die Übergangswahrscheinlichkeit und den Meßdaten bildet man die Likelihoodfunktion L:

$$L = \prod_{i=1}^{N-1} T(\vec{x}_i, \vec{x}_{i+1}, \vec{p}, \vec{q}) \tag{4.6}$$

Das Maximum von L bestimmt die optimalen Parameter $\vec{p}$ und $\vec{q}$. Dieser Ansatz hat gegenüber anderen Methoden (z.B. Momentenmethode) einige entscheidende Vorteile: Maximum-Likelihood-Methoden haben unter allen asymptotisch normalverteilten Schätzungen die größte Wirksamkeit [BS89, Kap. 5.2.2.2]. Das bedeutet, daß die in den Meßdaten enthaltenen Informationen von der Maximum-Likelihood-Methode optimal verwertet werden.

Dieses Verfahren ist sehr allgemein, wobei man sich jedoch in der Praxis normalerweise auf Funktionen R der Form

$$R(\vec{\varepsilon}_i, \vec{q}) = \frac{1}{N(\vec{q})} \exp\left(-P(\vec{\varepsilon}_i, \vec{q})\right) \tag{4.7}$$

beschränkt, in denen $P(\vec{\varepsilon}_i, \vec{q})$ ein positives Polynom niedrigen Grades ist. Statt dem Maximum von L kann man nämlich auch das von $\ln L$ suchen und erhält dann folgende Bedingung:

$$(N-1) \cdot \ln N(\vec{q}) + \sum_{i=1}^{N-1} P(\vec{y}_i, \vec{q}) \rightarrow \text{Min !} \tag{4.8}$$

Offensichtlich reduziert sich hier das Optimierungsproblem auf die Suche des Minimums von Polynomen. Im Falle einer Gaußverteilung ist P vom Grad 2; damit ist (4.8) äquivalent zu (4.2), dem Least-Square-Fit.

4.1.4 Die Maximum-Likelihood-Methode mit Langzeittermen

Interessanter wird die Anwendung der Likelihood-Funktion bei der Hinzunahme von Langzeittermen, die sich formal so schreiben lassen:

$$\Theta^r(\vec{x}_i, \vec{x}_{i+r}, \vec{p}, \vec{q}) = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \Theta^{r-1}(\vec{x}_i, \vec{z}, \vec{p}, \vec{q}) \cdot \Theta^1(\vec{z}, \vec{x}_{i+r}, \vec{p}, \vec{q}) dz_1 dz_2 \ldots dz_m \tag{4.9}$$

mit $\Theta^1(\vec{z}, \vec{x}_{i+r}, \vec{p}, \vec{q}) = \Theta(\vec{z}, \vec{x}_{i+r}, \vec{p}, \vec{q})$. $\vec{a}, \vec{b}$ sind die Grenzen des physikalisch relevanten Gebietes.

Es wird über alle m Komponenten aller möglichen Zwischenzustände $\vec{z}$ integriert. Θ^r beschreibt die Beziehung zwischen den Meßwerten x_i und x_{i+r}.

Wir betrachten nur Übergangswahrscheinlichkeiten Θ, die als Polynom in allen Variablen und Parametern darstellbar sind. Die Integrationen über die Zwischenzustände lassen sich dann immer analytisch ausführen.

Die zu maximierende Likelihoodfunktion ist:

$$L = \prod_{i=1}^{N-r_{\max}} \prod_{r=1}^{r_{\max}} \Theta^r(\vec{x}_i, \vec{x}_{i+r}, \vec{p}, \vec{q}) \to \text{Max!} \tag{4.10}$$

Zur Suche des Maximums von L verwendet man am besten das Verfahren aus Kapitel 4.2.1.

Die Langzeitterme werden bei dieser Methode automatisch richtig gewichtet. Für chaotische Systeme liefern die Faktoren für große r keine falschen Ergebnisse, sind aber unwichtig, da sie keinen scharfen Peak haben. Bei periodischen Systemen wird aber durch diese Methode die Langzeitinformation der Dynamik für der Modellbildung genutzt.

Die Methode ist deshalb so wertvoll, weil man im Stadium der Modellbildung bei verrauschten Systemen noch gar nicht weiß, ob die Dynamik periodisch oder chaotisch ist.

4.2 Neue Verfahren zur nichtlinearen Optimierung

Die Ermittlung optimaler Modelle führt letztendlich auf das Problem der Suche des Maximums der Qualitätsfunktion. Die Lage des Maximums bestimmt die unbekannten Modellparameter. In der Regel sind mehrere Parameter zu bestimmen, die im allgemeinen nichtlinear in die Gütefunktion eingehen.

Es sollen hier zwei neue Verfahren zu diesem Problem der nichtlinearen Optimierung erläutert werden, die interessante Vorteile gegenüber Konkurrenzverfahren bieten. Beide Verfahren sind im momentanen Stand auf Polynome anwendbar, wobei eine Verallgemeinerung auf andere Funktionenklassen denkbar ist. Die zugehörigen Programme finden sich im Anhang B.

4.2.1 Suche des absoluten Minimums oder Maximums eines Polynoms durch algebraische Bisektion

Das Problem besteht in der Suche des absoluten Maximums eines Polynoms in n Variablen:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \sum_{i_1=0}^{r_1} \sum_{i_2=0}^{r_2} \ldots \sum_{i_n=0}^{r_n} c_{i_1,i_2,\ldots,i_n} {x_1}^{i_1} \cdot {x_2}^{i_2} \cdot \ldots \cdot {x_n}^{i_n} \tag{4.11}$$

im Intervall $x_1 \in I_1 = [a_1; b_1], x_2 \in I_1 = [a_2; b_2], \ldots, x_n \in I_n = [a_n, b_n]$, oder kürzer:

$$P(\vec{x}) := \sum_{\vec{i}=\vec{0}}^{\vec{r}} c_{\vec{i}} \prod_{j=1}^{n} {x_j}^{i_j} \qquad (4.12)$$

mit $x_i \in I_i = [a_i; b_i]\ \forall i = 1, \ldots, n$.

Das Maximum des Polynoms läßt sich mit folgendem Algorithmus finden [TEH+90]:

1. Teile das Intervall bezüglich einer Variablen x_i in b Teilbereiche. Schätze eine Untergrenze $L(P(\vec{x}))$ und eine Obergrenze $U(P(\vec{x}))$ des Polynoms in jedem Teilbereich. Eine günstige Wahl ist $b = 4$.
2. Wenn die Obergrenze des Polynoms in einem bestimmten Teilbereich kleiner ist als die Untergrenze des Polynoms in irgendeinem anderen Teilbereich, kann ersterer Teilbereich das Maximum nicht enthalten und braucht deshalb nicht weiter berücksichtigt zu werden.
3. Schätze Unter- und Obergrenzen für die Ableitungen $\frac{\partial P(\vec{x})}{\partial x_i}$ in jedem noch zu behandelnden Teilbereich.
4. Wenn in einem Teilbereich gilt: $U(\frac{\partial P(\vec{x})}{\partial x_i}) < 0$, kann dieser das Maximum nicht enthalten, es sei denn, die linke Teilintervallgrenze fällt mit der linken Grenze des Gesamtgebiets zusammen (bezogen auf die ausgewählte Variable).
5. Analog kann ein Teilbereich das Maximum nicht enthalten, wenn gilt: $L(\frac{\partial P(x)}{\partial x}) > 0$, es sei denn, der Teilbereich liegt am rechten Rand.
6. Für jeden Teilbereich, den man nicht durch (2., 4., 5.) ausschließen konnte, muß die Prozedur bei (1.) startend für eine weitere Variable x_i wiederholt werden, bis die gewünschte Genauigkeit in jeder Variable erreicht ist.

Oft können alle Teilbereiche ausgeschlossen werden, außer dem, der das Maximum enthält. Wenn mehrere Maxima mit gleichem Funktionswert in verschiedenen Teilbereichen existieren sollten, werden alle diese Teilbereiche erhalten bleiben. Der Algorithmus erkennt auch Maxima am Rand des Definitionsgebiets.

Abschätzung einer Ober- und Untergrenze eines Polynoms in einem gegebenen Intervall

Gegeben sei das Polynom $P(\vec{x}) := \sum_{\vec{i}=\vec{0}}^{\vec{r}} c_{\vec{i}} \prod_{j=1}^{n} {x_j}^{i_j}$ im Intervall $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

Durch die Koordinatentransformation

$$x_i = (b_i - a_i)\hat{x}_i + a_i \quad \forall i = 1, \ldots, n \tag{4.13}$$

wird das gegebene Intervall auf das Einheitsintervall $\left[\vec{0}, \vec{1}\right]$ transformiert, wodurch sich neue Koeffizienten $\hat{c}_i$ ergeben. Eine weitere simple Transformation $\hat{P} = P - \hat{c}_{\vec{0}}$ sichert: $\hat{P}(\vec{\hat{x}} = \vec{0}) = 0$.

Die Summe kann dann aufgespalten werden in einen Teil $u(\hat{P}(\vec{\hat{x}}))$ mit lauter positiven Koeffizienten und einen Teil $\ell(\hat{P}(\vec{\hat{x}}))$ mit lauter negativen Koeffizienten. Offensichtlich ist der erste Teil streng monoton steigend und der zweite streng monoton fallend. Außerdem gilt für $\vec{\hat{x}} \in \left[\vec{0}, \vec{1}\right]$: $\ell(\hat{P}(\vec{\hat{x}})) < \hat{P}(\vec{\hat{x}}) < u(\hat{P}(\vec{\hat{x}}))$.

$$\hat{P}(\vec{\hat{x}}) := \underbrace{\sum_{\vec{i}=\vec{0}, \hat{c}_{\vec{i}}>0}^{\vec{r}} \hat{c}_{\vec{i}} \prod_{j=1}^{n} x_j{}^{i_j}}_{u(\hat{P}(\vec{\hat{x}}))} + \underbrace{\sum_{\vec{i}=\vec{0}, \hat{c}_{\vec{i}}<0}^{\vec{r}} \hat{c}_{\vec{i}} \prod_{j=1}^{n} x_j{}^{i_j}}_{\ell(\hat{P}(\vec{\hat{x}}))} \tag{4.14}$$

Eine grobe Abschätzung der oberen Grenze $U(\hat{P}(\vec{\hat{x}}))$ ist demnach

$$U(\hat{P}(\vec{\hat{x}})) = u(\hat{P}(\vec{1})) = \sum_{\vec{i}=\vec{0}, \hat{c}_{\vec{i}}>0}^{\vec{r}} \hat{c}_{\vec{i}} \tag{4.15}$$

Analog ergibt sich die untere Grenze zu

$$L(\hat{P}(\vec{\hat{x}})) = \ell(\hat{P}(\vec{1})) = \sum_{\vec{i}=\vec{0}, \hat{c}_{\vec{i}}<0}^{\vec{r}} \hat{c}_{\vec{i}} \tag{4.16}$$

Verbesserte Abschätzungen der Ober- und Untergrenzen

Das schlichte Addieren der positiven bzw. negativen Koeffizienten eines Polynoms führt zu einer recht groben Abschätzung der Ober- bzw. Untergrenze. Im folgenden wird ein verbesserter Algorithmus für die Berechnung der Obergrenze gezeigt. Die Untergrenze erhält man dann leicht mit:

$$L(P(\vec{x})) = -U(-P(\vec{x})) \tag{4.17}$$

Die genauere Abschätzung ergibt sich unter Verwendung der Relation

$$-x^{\alpha} > -x^{\beta} \quad \text{für} \quad x \in [0,1] \quad \text{und} \quad \alpha > \beta \tag{4.18}$$

Ein negativer Term, z.B. $a_{\vec{i}} \prod_{j=1}^{n} x_j{}^{i_j}$, kann damit ersetzt werden durch den sicher größeren Term $a_{\vec{i}} \prod_{j=1}^{n} x_j{}^{k_j}$, mit $k_j \geq i_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Beispiel für ein eindimensionales Polynom:

$$P(x) = -x + 3x^2 + 2x^4 - 6x^5 + 4x^7$$

dessen grob abgeschätzte Obergrenze sich zu $U(x) = 9$ ergibt.

Durch Ersetzung aller x^i mit negativen Koeffizienten durch x^k, mit $k \geq i$, erhält man ein neues Polynom $P^*(x) > P(x)$. Im Beisipiel: $P^*(x) = -x^2 + 3x^2 + 2x^4 - 6x^7 + 4x^7 = 2x^2 + 2x^4 - 2x^7$. Der Ersetzungsprozeß kann mit folgendem Schema veranschaulicht werden:

x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
-1	3	0	2	-6	0	4

Die Exponenten wachsen von links nach rechts. Demnach ist das Verschieben eines Koeffizienten von links nach rechts äquivalent zur oben erklärten Substitution. Nach dem Verschieben der negativen Koeffizienten kann man sie mit den positiven verrechnen. Die übrigbleibenden Koeffizienten bilden das neue Polynom $P^*(x)$.

Anwendung von (4.15) auf das neue Polynom $P^*(x)$ liefert $U(x) = 4$, eine wesentlich bessere Abschätzung für die Obergrenze des Polynoms.

Das Verfahren läßt sich leicht auf mehrere Dimensionen übertragen. Ein zweidimensionales Beispiel:

$$\begin{aligned} P(x) &= -3x_1 + 6{x_1}^2 + 3{x_1}^3 - 8x_2 + 2x_1x_2 - 5{x_1}^3x_2 + x_1{x_2}^2 \\ &\quad -8{x_1}^2{x_2}^2 + {x_2}^3 + 4x_1{x_2}^3 + 3{x_1}^2{x_2}^3 + 6{x_1}^3{x_2}^3 \end{aligned}$$

Die nach (4.15) grob berechnete Obergrenze ergibt sich zu $U(x) = 26$.

Die Koeffizienten lassen sich wieder in ein Schema eintragen, wobei diesmal die Exponenten von links nach rechts und von oben nach unten zunehmen:

	${x_1}^0$	${x_1}^1$	${x_1}^2$	${x_1}^3$
${x_2}^0$	0	-3	6	3
${x_2}^1$	-8	2	0	-5
${x_2}^2$	0	1	-8	0
${x_2}^3$	1	4	3	6

Negative Koeffizienten darf man deshalb sowohl nach unten als auch nach rechts verschieben. Optimale Anwendung dieser Möglichkeiten liefert als neues Polynom $P^*(x) \geq P(x)$:

$$P^*(x) = 3{x_1}^2 + 3{x_1}^3 - 4{x_1}^3{x_2}^3$$

Anwendung von (4.15) auf $P^*(x)$ liefert $U(x) = 6$ als wesentlich besseren Wert für die Obergrenze.

Komplexität und Rechenzeit

Die nichtlineare Optimierung gehört zu den sog. NP-harten Problemen, d.h. die Komplexität des Algorithmus, also die Anzahl der durchzuführenden Rechenoperationen wächst schneller als polynomial (Nicht Polynomial) mit der Komplexität des Problems. Im Falle der Optimierung von Polynomen wächst die Komplexität des Problems mit der Zahl der Variablen, mit dem Grad des Polynoms und mit der gewünschten Genauigkeit.

Die Komplexitätstheorie der Informatik zeigt, daß alle NP-harten Probleme zueinander gleichwertig sind [HU90, S.353],[Kar86]. Diese Aussagen beziehen sich stets auf allgemeine Probleme, d.h. es gibt keinen Algorithmus, der *alle* nichtlinearen Polynome in polynomialer Zeit optimieren kann. Über kleinere Klassen von Polynomen macht die Komplexitätstheorie keine Aussage, insbesondere wenn es um die mathematisch schwer definierbare Klasse der physikalisch relevanten Polynome geht. Die Aussagen der Komplexitätstheorie lassen sich deshalb nur beschränkt zur Entwicklung besserer Algorithmen nutzen [Zen92].

Der oben beschriebene Algorithmus ist eine neue Methode, mit der man *in praxi* das Problem der nichtlinearen Optimierung angehen kann. Er ergänzt andere Methoden, indem er für eine andere Teilklasse von Problemen geeignet scheint als bisher bekannte Verfahren.

Das Problem bei der nichtlinearen Optimierung liegt darin, daß man nicht jede „Ecke“ des Definitionsgebietes untersuchen kann, weil es einfach in einem hochdimensionalen Raum zuviele davon gibt. Wollte man sich rein numerisch einen Überblick über den Verlauf einer Funktion mit 100 Variablen verschaffen, indem man pro Variable an 4 Stützstellen den Funktionswert bestimmt, so müßte man 4^{100} Funktionswerte berechnen, was auf einer CRAY Y-MP etwa 10^{33} Jahre brauchen würde [Ebe89].

Die eine Strategie, um ohne die Beleuchtung jedes Winkels auszukommen, ist die Verwendung stochastischer Algorithmen (Simulated Annealing, Genetische Algorithmen), die allerdings aufgrund ihrer Natur nicht immer das Optimum finden.

Der oben beschriebene Algorithmus umgeht das Problem dadurch, daß analytisch berechnete Unter- und Obergrenzen es ermöglichen, ganze Teilintervalle von der weiteren Untersuchung auszuschließen. In jedem Teilschritt werden nur absolut sichere Aussagen erzielt.

Die Rechenzeit wächst im allgemeinen bei weiterer Verfeinerung des Gitters kaum an, da die Zahl der zu untersuchenden Teilintervalle ungefähr konstant bleibt. Das Anwachsen ist auf die länger werdenden rationalen Zahlen zurückzuführen, die durch ihre „unendliche Genauigkeit“ numerische Probleme ausschließen.

Ein Testlauf für ein Problem mit 100 Variablen benötigte auf einer SUN 3/50 drei

Tage, verschwindend kurz im Vergleich zu 10^{33} Jahren!

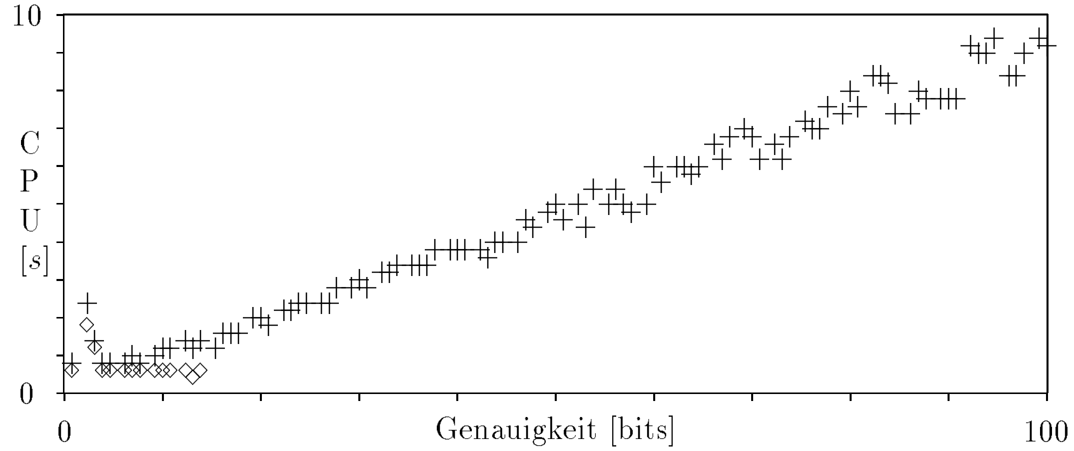


Abbildung 4.1: Rechenzeit pro Iteration bei der Maximumsuche von $f(x) = x^2 - x^4 + \frac{x}{100}$, $x \in [-1, 1]$ bei Verwendung von rationalen Zahlen (+) und Gleitkomma-Arithmetik (◇) (aus: [TEH91]). Da sich die beiden Maxima nur sehr wenig voneinander unterscheiden und die Maxima recht flach sind, läßt sich unter Verwendung von Gleitkomma-Zahlen keine höhere Genauigkeit als ca. 14 bit erreichen.

Während der ersten Iterationen können normalerweise nicht alle Intervalle bis auf eines eliminiert werden. Dadurch wächst die benötigte Rechenzeit pro Iteration zunächst an. Jedoch verbessert sich die Güte der Abschätzungen, wenn die Intervalle kleiner werden, so daß in den folgenden Iterationen die Zahl der Intervallkandidaten wieder drastisch sinkt. Die Rechenzeit bleibt dann nahezu konstant, wenn Gleitkomma-Arithmetik verwendet wird. Bei Verwendung von rationaler (exakter) Arithmetik steigt die Rechenzeit etwa linear mit der Zahl der zur Darstellung der Intervallgrenzen benötigten Ziffern (vgl. Abb. 4.1).

4.2.2 Analytischer Fit des Maximums einer positiven Funktion

Die Suche des absoluten Maximums nichtlinearer Funktionen wird unter anderem dadurch erschwert, daß verschiedene lokale Maxima sich nur unwesentlich in ihrem Funktionswert unterscheiden. Es ist aber bekannt, daß der Unterschied größer wird, wenn man statt der Funktion selbst das Quadrat oder eine noch größere Potenz der Funktion betrachtet. Im Extremfall überragt dann das eine größte Maximum alle anderen um Größenordnungen.

In diesem Fall kann man das Maximum einfach erhalten, indem man innerhalb des zu durchsuchenden Intervalls eine Parabel an die potenzierte Funktion anpaßt. Die

Anpassung und die Bestimmung des Scheitels der Parabel kann analytisch geschehen, so daß das Maximum als Funktion eines Kontrollparameters erhalten wird.

Als Gütefunktion dient dabei die quadratische Abweichung $(f(x)^{m_p} - (ax^2 + bx + c))^2$, multipliziert mit einer Gewichtsfunktion $f(x)^{m_w}$, die gewährleistet, daß Abweichungen nur in der Nähe des Maximums gewertet werden. Um den Rechenaufwand in Grenzen zu halten, wählt man $m_p \in \{8, 10, 12\}$ und $m_w \in \{2, 4\}$.

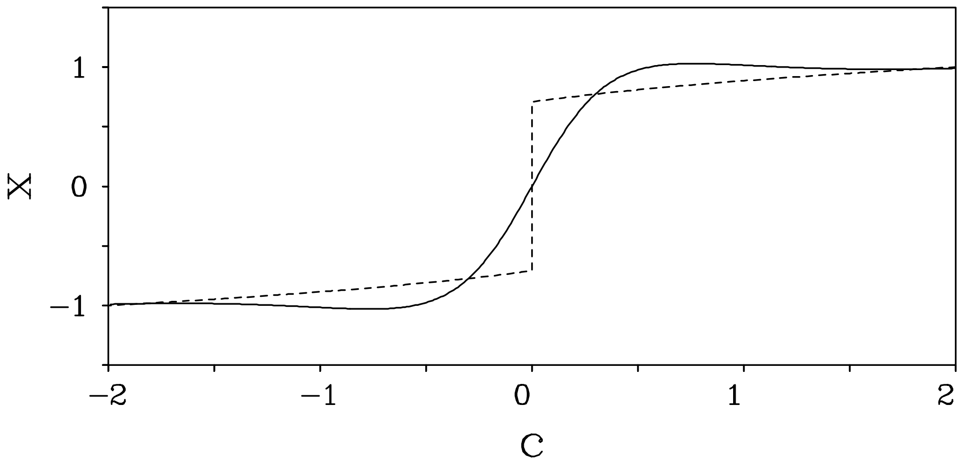


Abbildung 4.2: Lage des Maximums des Polynoms $P(x) = 10 - x^4 + x^2 + cx$ (gestrichelt) und Lage des Scheitels der angepaßten Parabel (durchgezogen) als Funktion des Parameters c. Für diesen Plot wurde $m_p = 10$ und $m_w = 2$ gewählt. Das Suchintervall ist $[-1.5, 1.5]$.

Kapitel 5

Rückkopplungsfreie Steuerung nichtlinearer Systeme mit diskreten Abbildungen

Eines der Hauptziele der Modellbildung ist die Ermittlung optimaler Steuerkräfte, mit denen man ein gegebenes dynamisches System zu einer vorgebbaren Wunschdynamik zwingen kann. In diesem Kapitel soll beschrieben werden, wie sich derartige Steuerkräfte aus Abbildungen berechnen lassen, die als Modell für die Eigendynamik des Systems dienen. Diese Abbildungen lassen sich mit den Methoden aus Kapitel 2 aus Differentialgleichungen berechnen oder — wie in Kapitel 4 — aus experimentellen Zeitreihen der ungestörten Dynamik gewinnen.

Die hier beschriebenen Ansätze sind Weiterentwicklungen der Steuertheorie von Hübler [Hüb87, HL89], die erfolgreich zur Steuerung von kontinuierlichen Systemen mit kontinuierlichen Steuerkräften [RHL87, WSHL88], sowie zur Steuerung der logistischen Abbildung [JH90] verwendet wurde.

Ein besonderes Merkmal dieser Steuerungstheorie gegenüber anderen [OGY90, SRR90, HL90] ist das Fehlen der Rückkopplung zum experimentellen System während des Steuerungsvorgangs. Damit ist die Möglichkeit geschaffen, auch Systeme zu beherrschen, bei denen eine Rückkopplung unmöglich erscheint, etwa bei moleküldynamischen Prozessen. Andere Weiterentwicklungen von Hüblers Theorie zielen auf die Anwendbarkeit bei sich verändernden Sytemen [Hüb89], Systemen mit verborgenen Variablen [BH90] oder mit Rauschen [BDH90] ab.

In den folgenden Abschnitten soll gezeigt werden, wie man *kontinuierliche Systeme* mit *diskreten* Abbildungen rückkopplungsfrei steuern kann. Dazu soll zunächst die Steuerungstheorie für diskrete Systeme skizziert werden. Die Steuerung mit diskreten Abbildungen — insbesondere mit Poincaré-Abbildungen — hat gegenüber der Steuerung mit Differentialgleichungen zwei entscheidende Vorteile:

- Abbildungen lassen sich aus experimentellen Daten leichter rekonstruieren als Differentialgleichungen.
- Die Dimension von Poincaré-Abbildungen ist um wenigstens eins geringer als die Dimension der zugehörigen Differentialgleichung. Damit genügt bei einer beliebigen Wunschdynamik auch eine Antriebskraft mit einer um wenigstens eins niedrigeren Zahl von Komponenten. Da man oft nur eine einzige Komponente steuern kann, hilft die Verwendung von Poincaré-Abbildungen wesentlich bei der Realisierung einer großen Zahl von Wunschdynamiken, auf die das System stabil gesteuert werden kann.

5.1 Steuerung diskreter Systeme

Gegeben sei ein experimentelles System, dessen Dynamik durch eine Abbildung $\vec{f}$ beschrieben werden kann:

$$\vec{\tilde{y}}_{i+1} = \vec{\tilde{f}}(\vec{\tilde{y}}_i) + \vec{K}_i \tag{5.1}$$

Dabei sei $\vec{\tilde{y}}_i$ der Zustandsvektor des Systems zum Zeitpunkt t_i und $\vec{K}_i$ die — noch zu berechnende — Steuerkraft, die bei t_i appliziert werden soll. Falls $\vec{f}$ eine stroboskopische Abbildung ist, gilt: $t_i = i \cdot T + t_0$, wobei T die Stroboskopierzeit ist. Im Falle von Poincaré-Abbildungen sind die t_i durch die Zeitpunkte des Durchstoßes der Trajektorie durch die Poincaré-Ebene gegeben.

Von der Eigendynamik des experimentellen Systems existiere ein Modell:

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{f}(\vec{y}_i) \tag{5.2}$$

Dieses Modell soll nicht zu schlecht sein, d.h. es soll gelten: $\vec{\tilde{f}} \approx \vec{f}$. Zunächst soll der Einfachheit halber nur der Fall $\vec{\tilde{f}} = \vec{f}$ und $\vec{\tilde{y}}_i = \vec{y}_i$ behandelt werden; das Modell soll exakt sein. Die Auswirkungen von Abweichungen in den Modellparametern wird in [CHP89] diskutiert und im Abschnitt 5.4 zur genauen Ermittlung der Modellparameter verwendet.

Die Wunschdynamik kann man ebenfalls als Abbildung definieren:

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{g}(\vec{x}_i) \tag{5.3}$$

Die Abweichung $\vec{\varepsilon}_i := \vec{y}_i - \vec{x}_i$ der Istdynamik von der Solldynamik muß für $i \to \infty$ gegen Null streben, wenn die Steuerung stabil sein soll.

Die Wahl

$$\vec{K}_i{}^* = -\vec{f}(\vec{y}_i) + \vec{g}(\vec{x}_i) \tag{5.4}$$

für die Antriebskraft bewirkt offensichtlich eine Zerstörung der Eigendynamik des Systems und eine Etablierung der Wunschdynamik. $\vec{\varepsilon}_i$ wird dadurch bereits nach dem ersten Schritt exakt Null. In diese Steuerkraft geht aber noch $(\vec{y}_i)$ ein, es ist also Rückkopplung notwendig.

Der rückkopplungsfreie Ansatz

$$\vec{K}_i = -\vec{f}(\vec{x}_i) + \vec{g}(\vec{x}_i) \tag{5.5}$$

führt zu einem gesteuerten System, dessen Abweichung folgender Iterationsgleichung gehorcht:

$$\vec{E}(\varepsilon_i) := \vec{\varepsilon}_{i+1} = \vec{f}(\vec{x}_i + \vec{\varepsilon}_i) - \vec{f}(\vec{x}_i) \tag{5.6}$$

$\vec{\varepsilon}_i = \vec{0}$ ist dabei offensichtlich ein Fixpunkt der Funktion $\vec{E}$, d.h. wenn das System einmal den Wunschzustand erreicht, wird es ihn auch beibehalten. Interessanter ist aber die Frage nach der Stabilität dieses Fixpunktes, also die Frage, ob eine erfolgreiche Steuerung auch dann möglich ist, wenn der Anfangszustand des experimentellen Systems unbekannt ist oder Rauschen vorliegt.

Lineare Stabilitätsanalyse liefert folgende hinreichende Bedingung für die Stabilität der Steuerung[1]:

> Die rückkopplungsfreie Steuerung diskreter Systeme ist dann stabil, wenn alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix $(\frac{\partial E_j}{\partial \varepsilon_k})$ für alle Werte $\vec{x}_i$ der Wunschdynamik innerhalb des Einheitskreises liegen.

5.2 Kraftübertragung auf kontinuierliche Systeme

Liegt eine stroboskopische Abbildung als Modell des Systems vor, und ergibt sich mit der oben skizzierten Stabilitätsanalyse eine stabile Steuerkraft zu einer gegebenen Wunschdynamik, so kann ein physikalisches System damit rückkopplungsfrei gesteuert werden.

Zusätzlich zu den Ausführungen am praktischen Beispiel in Kapitel 6 soll an dieser Stelle eine für die allgemeine Anwendbarkeit des Verfahrens entscheidende Frage erörtert werden: Wie steuert man *kontinuierliche* Systeme mit *diskreten* Kräften?

Zum einen muß — zumindest bei der Verwendung von Poincaré-Abbildungen — außer dem Modell f für die Dynamik der $\vec{y}_i$ noch ein Modell für die Zeitabstände $T_i(\vec{y}_i) := t_{i+1} - t_i$ gegeben sein, um die Steuerung im richtigen Moment anbringen zu können.

---

[1] Eine weniger strenge Bedingung für periodische Antriebskräfte ist in [JH90] hergeleitet. Für die Zwecke dieser Arbeit genügt allerdings auch das angegebene, einfachere Kriterium.

Zum anderen stellt sich die Frage, wie eine Steuerkraft $\vec{F}_c(t)$ mit

$$\vec{F}_c(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{K}_i \delta(t - t_i) \tag{5.7}$$

die nur zu diskreten Zeitpunkten t_i gegeben ist, auf ein kontinuierliches System

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}) + \vec{F}_c(t) \tag{5.8}$$

angewendet werden kann. Dazu muß man drei Fälle unterscheiden:

1. **Die Dauer der Kraftübertragung ist sehr klein gegenüber der typischen Zeitskala des Systems.**
   Dieser Fall ist z.B. gegeben bei dem Problem eines auf einer schweren, vibrierenden Platte hüpfenden Balles [GH83, S.102ff]. Wenn für die Modellierung und die Steuerung des Systems die gleichen diskreten Zeitpunkte gewählt werden, ist die Steuertheorie aus Abschnitt 5.1 direkt anwendbar.

2. **Statt eines δ-förmigen Kraftstoßes verwendet man einen rechteckförmigen Kraftverlauf.**
   Die δ-Funktion in (5.7) wird ersetzt durch

   $$\delta(t - t_i) \approx \frac{1}{dt} \left(\Theta(t - t_i - dt) - \Theta(t - t_i) \right) \tag{5.9}$$

   Dabei ist dt die Länge des Kraftstoßes. Das Ende der Krafteinwirkung trifft hier mit dem nächsten diskreten Zeitpunkt des Modells zusammen.

3. **Die Dynamik des Systems zwischen zwei diskreten Zeitpunkten ist glatt.**
   Bei einer großen Zahl von gedämpften mechanischen Schwingern fallen höhere Fourier-Komponenten rasch ab. Dann läßt sich eine kontinuierliche Approximation der diskreten Dynamik durch glatte Interpolation erhalten. Die Interpolation wird in einigen Fällen durch die Trägheit und die Dämpfung des Systems automatisch bewerkstelligt.

5.3 Steuerung mit Poincaré-Abbildungen

Ist nur eine Poincaré-Abbildung bekannt, so ergibt sich zusätzlich zu den im letzen Abschnitt erwähnten Problemen noch das Problem, daß man wissen muß, *wann* das System die Poincaré-Ebene durchstößt, um die Kraft im richtigen Moment anwenden zu können.

Will man rückkopplungsfrei steuern, so wird man den optimalen Zeitpunkt der Krafteinwirkung in der Regel nicht treffen, sondern mit einem Zeitfehler δt_i. Wenn es einen stabilisierenden Effekt gibt, so daß durch die Systemdynamik der nächste Zeitfehler δt_{i+1} betragsmäßig kleiner ist als δt_i, gibt es einen Bereich von Anfangsbedingungen, für den die Steuerung mit Poincaré-Abbildungen ohne jede Rückkopplung funktioniert [ESGH92].

Aus experimentellen Daten oder aus einer Differentialgleichung numerisch abgeleitet seien gute Approximationen für die Funktionen $\vec{X}$ und T

$$\vec{X} : \vec{x}(t) \mapsto \vec{x}\,(t + T(\vec{x}_P)) \tag{5.10}$$

bekannt, wobei $T(\vec{x}_P)$ die Wiederkehrzeit auf die Poincaré-Ebene $\mathcal{P}$ angibt, wenn von $x_P \in \mathcal{P}$ gestartet wird. x_P soll dabei der zu $x(t)$ nächstgelegene Punkt der Poincaré-Ebene sein. Die Stabilität der Steuerung ergibt sich wie oben erläutert aus den Eigenwerten der Jacobi-Matrix:

$$\hat{M} = \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_k}\right)\Bigg|_{\vec{x}=\vec{x}_P} \tag{5.11}$$

Für dissipative dreidimensionale Systeme läßt sich noch ein einfacheres Kriterium angeben. Es sei hier vorausgesetzt, daß ein Koordinatensystem so gewählt werden kann, daß die Poincaré-Abbildung mit der Poincaré-Ebene $\mathcal{P} : \{\vec{x}|x_2 = 0\}$ sich gut durch eine eindimensionale Abbildung $P_1 : (x_1)_n \longmapsto (x_1)_{n+1}$ approximieren läßt, wobei $(x_1)_n$ der Wert von x_1 beim n-ten Durchstoß ist. Dann schrumpft die Stabilitätsmatrix auf:

$$M(x_1) = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \end{array}\right)\Bigg|_{x_2=0} =: \left(\begin{array}{cc} m_{11}(x_1) & m_{12}(x_1) \\ m_{21}(x_1) & m_{22}(x_1) \end{array}\right) \tag{5.12}$$

Für x_1 sind die Punkte der Wunschdynamik einzusetzen.

Da m_{12} aufgrund des senkrechten Durchstoßes der Trajektorie durch die Poincaré-Ebene verschwindet, ergeben sich die Eigenwerte von M zu $\lambda_1 = m_{11}$ und $\lambda_2 = m_{22}$. $|\lambda_1|$ muß kleiner als 1 sein, wenn die Steuerung innerhalb der Poincaré-Ebene stabil sein soll, während $|\lambda_2| < 1$ die Stabilität in Trajektorienrichtung — also gegen Fehler in der Wahl des Steuerungszeitpunktes — garantiert.

Der Wert von λ_2 läßt sich in einigen Fällen statt durch Bestimmung der zweidimensionalen Abbildung $\vec{X}$ auch durch folgende Abschätzung gewinnen, wenn die Winkelgeschwindigkeit der Trajektorie in der (x_1, x_2)-Ebene in der Nähe der Poincaré-Ebene nahezu konstant ist. Dann gilt nämlich:

$$\lambda_2 \approx \frac{(x_1)_{n+1}}{(x_1)_n} \approx \frac{P_1((x_1)_n)}{(x_1)_n} \tag{5.13}$$

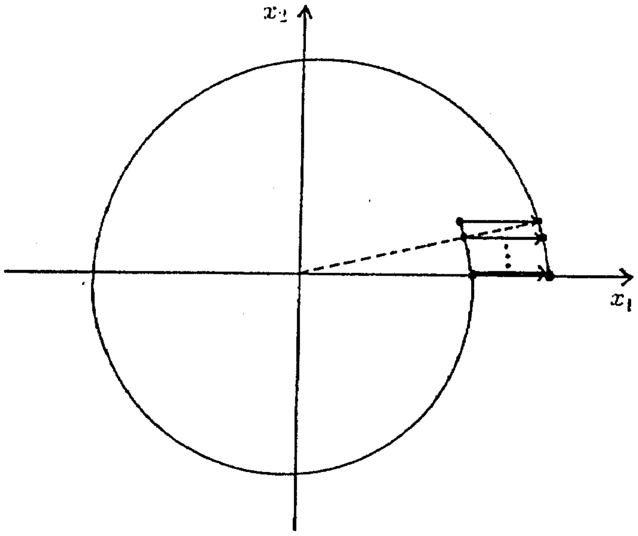


Abbildung 5.1: Zur Veranschaulichung der Näherung für λ_2 in (5.13). Für den Fall näherungsweise konstanter Winkelgeschwindigkeit verhalten sich die Abweichungen in x_2-Richtung wie die Abweichungen in x_1-Richtung.

Damit ist die Steuerung stabil, falls

$$|P_1((x_1)_n)| < |(x_1)_n| \tag{5.14}$$

für alle Punkte $(x_1)_n$ der Wunschdynamik gilt.

Anwendung auf das Rössler-System

Das Rössler-System (1.3) erfüllt die Bedingungen des letzten Abschnitts. Dazu wählt man als Poincaré-Ebene $x_2 = 0, \dot{x}_2 < 0$, weil in diesem Bereich x_3 nahezu verschwindet (vgl. Abb. 1.6). Die Dynamik auf dem Poincaré-Schnitt kann also näherungsweise eindimensional betrachtet werden. Außerdem hängt die Wiederkehrzeit zur Poincaré-Ebene in der Nähe des Attraktors nur schwach von x_1 ab (vgl. Abb. 5.2).

Auch der nächste x_1-Wert hängt nur sehr schwach vom Anfangswert von x_3 ab (vgl. Abb. 5.3). Im folgenden wird deshalb die Abhängigkeit von der x_3-Komponente vernachlässigt. Durch Anwendung numerischer Verfahren (vgl. Kapitel 2.2.2) erhält man Polynomapproximationen für die Wiederkehrzeit und den nächsten x_1-Wert als Funktion der Anfangswerte für x_1 (Tabelle 5.1).

Diese Approximationen stellen das diskrete Modell des Rössler-Systems dar, mit dem es nun gesteuert werden soll. Als Solldynamik wurde eine periodische Dynamik des kontinuierlichen Systems, also ein Fixpunkt in der Poincaré-Ebene gewählt:

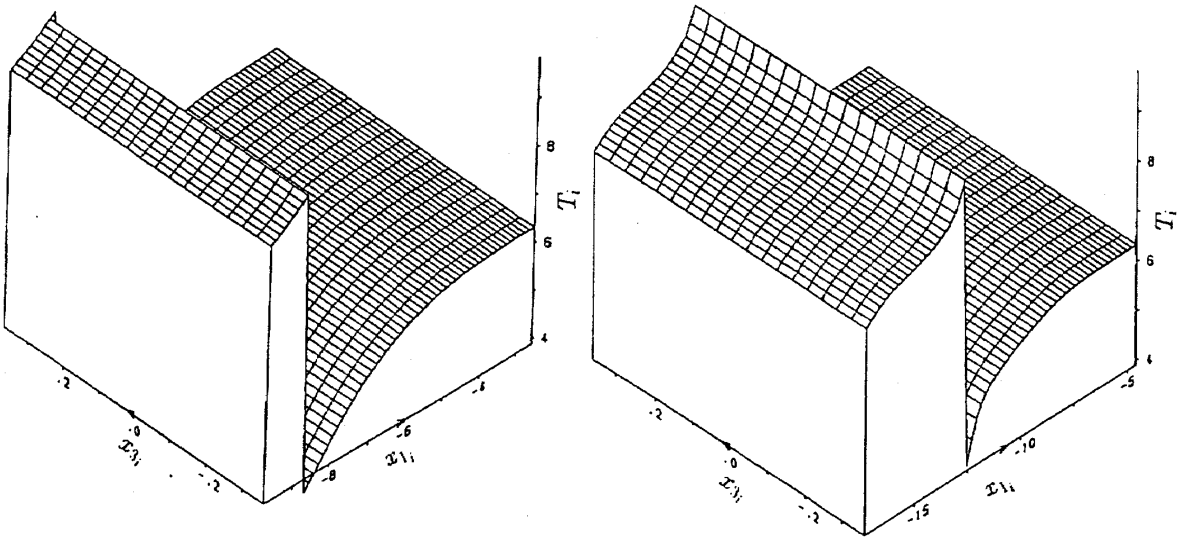


Abbildung 5.2: Wiederkehrzeit zur Poincaré-Ebene ($x_2 = 0, \dot{x}_2 < 0$) des Rössler-Systems mit $\mu = 4.5$ (links) und $\mu = 8$ (rechts) als Funktion der Anfangsbedingungen für x_1 und x_3.

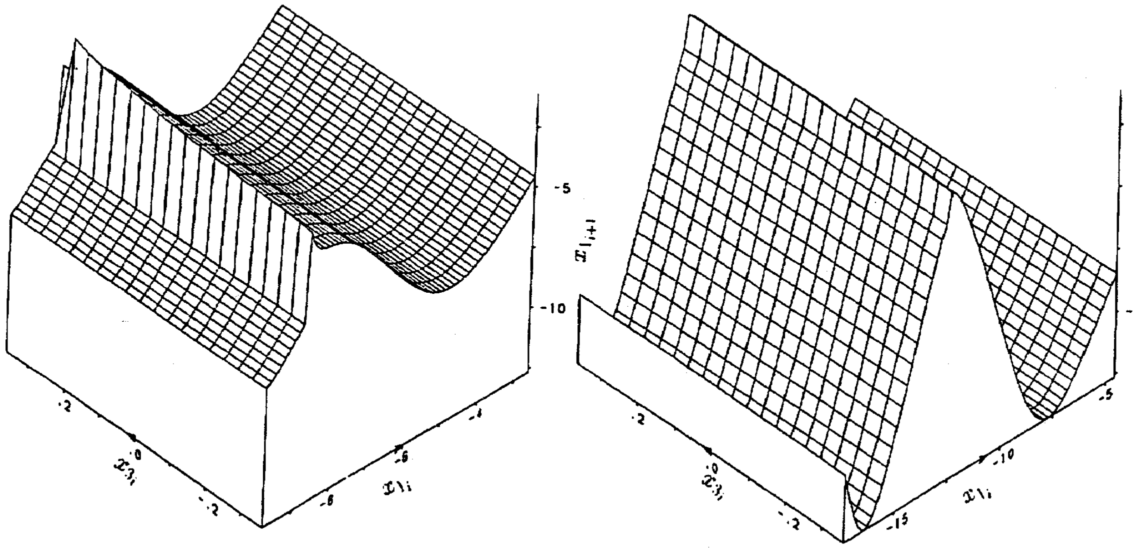


Abbildung 5.3: x_1-Wert des Rössler-Systems beim nächsten Durchstoß durch die Poincaré-Ebene ($x_2 = 0, \dot{x}_2 < 0$) als Funktion der Anfangsbedingungen für x_1 und x_3. Links: $\mu = 4.5$. Rechts: $\mu = 8$

$$x_{1_{i+1}} = \sum_{j=0}^{5} c_j {x_{1_i}}^j$$

μ	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
4.5	-39.165	- 37.313	- 14.740	-2.5560	- 0.19506	- 0.0052418
6.0	9.3933	14.285	6.2026	1.4569	0.16034	0.0063821
8.0	6.1625	7.3908	1.8290	0.26529	0.014431	$-5.6356 \cdot 10^{-8}$

$$T_i = \sum_{j=0}^{5} c'_j {x_{1_i}}^j$$

μ	c'_0	c'_1	c'_2	c'_3	c'_4	c'_5
4.5	9.3805	3.2309	1.3117	0.25543	0.023922	0.00092793
6.0	7.0063	0.51449	0.12478	0.0088353	- 0.00040212	- 0.000030897
8.0	6.03831	- 0.24987	- 0.081352	- 0.011296	- 0.00052996	0.0000069055

Tabelle 5.1: Numerisch gewonnene Polynom-Approximationen 5. Grades für die Wiederkehrzeit und x_1-Wert beim nächsten Durchstoß durch die Poincaré-Ebene als Funktion des Anfangswertes für x_1. Für x_3 wurde als Anfangswert $x_3 = 0$ gewählt. Die Fits gelten für $x_1 \in [-9, -3]$ bei $\mu = 6$ und $\mu = 8$ bzw. für $x_1 \in [-8, -3]$ bei $\mu = 4.5$.

$$\vec{w}_{i+1} = \vec{g}(\vec{w}_i) = \begin{pmatrix} w_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

Dabei wurde für die Lage des Sollfixpunkts einmal $w_S = -8$, zum anderen $w_S = -5$ gewählt. Die Anwendung des Stabilitätskriteriums aus den Gleichungen (5.12) bis (5.14) liefert die Eigenwerte aus Tabelle 5.2. Eine stabile rückkopplungsfreie Steuerung auf eine periodische Wunschdynamik ist also für $\mu = 4.5$ möglich. Für $\mu = 6$ und $\mu = 8$ gibt es keinen Bereich für w_S, in dem beide Eigenwerte betragsmäßig kleiner als eins sind. Eine stabile Steuerung ist für diese Fälle also nicht zu erwarten.

Abb. 5.4 zeigt die Wirkung der Anwendung einer δ-förmigen Steuerkraft auf das kontinuierliche System.

Da bei realen Sytemen δ-förmige Kraftimpulse oft nicht angewendet werden können, wird nun das Verhalten bei Steuerung mit Rechteckimpulsen (Methode 2, Seite 59) untersucht. Abb. 5.5 zeigt für verschiedene Pulslängen dt die mittlere quadratische Abweichung der gesteuerten Dynamik von der Wunschdynamik

$$\Delta = \frac{1}{N} \sum_{i=N_0}^{N_0+N} \left((y_1)_i - w_S\right)^2 \tag{5.16}$$

μ	w_S	λ_1	λ_2
4.5	-8	-0.096598	0.32000
4.5	-5	-0.46185	1.4280
6	-8	-2.8977	0.78038
6	-5	1.3027	1.7628
8	-8	-0.49453	1.5777
8	-5	1.7813	1.8414

Tabelle 5.2: Eigenwerte der Stabilitätsmatrix (5.12) unter Verwendung der Abschätzungen (5.13) und (5.14) für das Rössler-System für verschiedene Werte von μ und w_S. Eine stabile Steuerung ist demnach für $\mu = 4.5$ und $w_S = -5$ möglich.

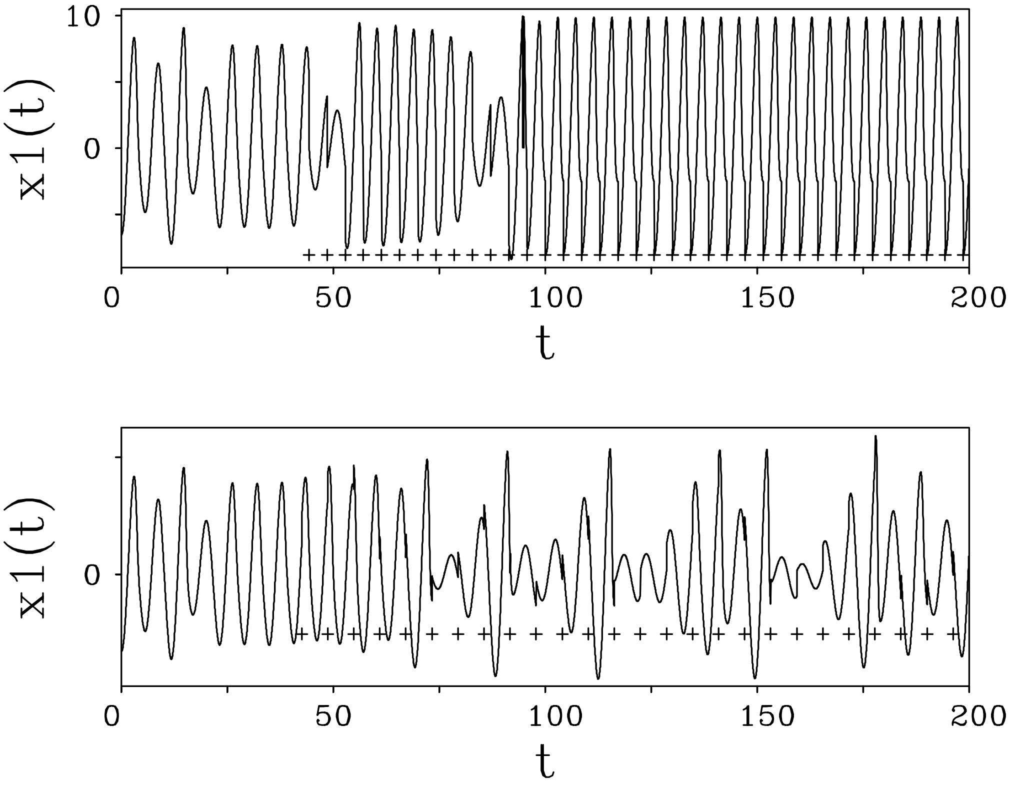


Abbildung 5.4: Steuerung des Rössler-Systems mit $\mu = 4.5$ mit δ-förmigen Pulsen. Die Bilder zeigen numerische Simulationen des kontinuierlichen Systems. Ab $t = 40$ wird die Steuerung eingeschaltet. Oben: $w_S = -8$. Unten: $w_S = -5$. Die Stabilisierung wirkt nur in einer Umgebung der Solldynamik. Deshalb dauert es für $w_S = -8$ noch einige Zeit, bis die Steuerung greift. Für $w_S = -5$ ist die Steuerung instabil. Die durchgezogene Linie stellt den Zeitverlauf der x_1-Koordinate des gesteuerten Systems dar, die Kreuze die Punkte der Wunschdynamik.

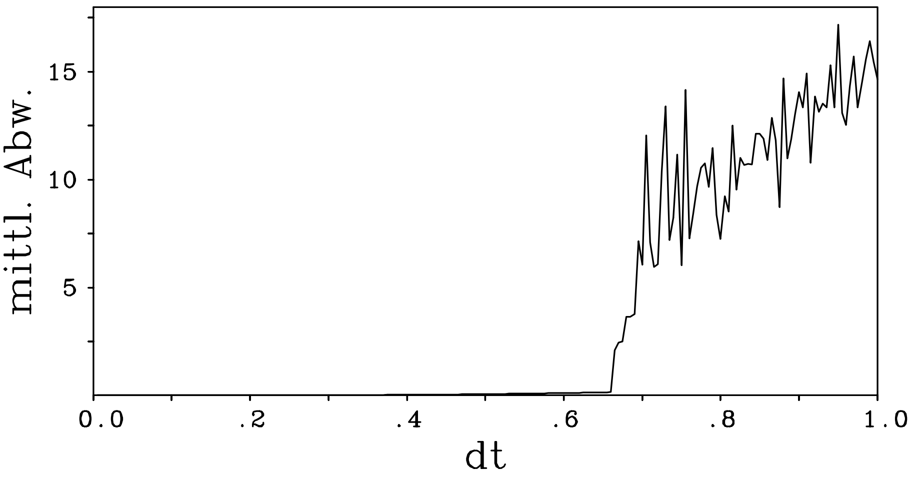


Abbildung 5.5: Steuerung des Rössler-Systems für $\mu = 4.5$ und $w_S = -8$. Aufgetragen ist die mittlere quadratische Abweichung (5.16) als Funktion der Pulslänge dt. Die Mittelung erfolgte über $N = 100$ Perioden der Wunschdynamik, nachdem bereits $N_0 = 100$ Perioden lang gesteuert wurde. Für $dt \leq 0.66$ ergeben sich kleine Abweichungen, die etwa proportional zu dt sind und größtenteils innerhalb der Strichbreite verschwinden. Die Solldynamik wird aber immer noch qualitativ erreicht. Für $dt > 0.66$ greift die Steuerung nicht mehr.

5.4 Nichtlineare Resonanzspektroskopie

Abweichungen der Modellparameter von den wahren Werten führen zu Abweichungen der Soll- von der Istdynamik des gesteuerten Systems. Diese Tatsache läßt sich hervorragend nutzen, um durch Variation der Modellparameter und Überwachung der Antwort des Systems genauere Werte für die Modellparameter zu ermitteln.

Dazu wird die mittlere Abweichung

$$\Delta = \frac{1}{N} \sum_{i=N_0+1}^{N_0+N} \left(\|\vec{\tilde{y}}_i - \vec{x}_i\| \right)^2 \tag{5.17}$$

der gesteuerten Dynamik von der Solldynamik gegen den vermuteten Wert des Modellparameters aufgetragen. Das Zeitfenster $i \in \{N_0+1, N_0+2, \ldots, N_0+N\}$ wird so gewählt, daß nach dem Einschwingen des Systems noch genügend Datenpunkte zur Mittelung zur Verfügung stehen. Es ergibt sich ein deutliches Minimum beim korrekten Wert. Das gilt auch bei der Anwesenheit von Rauschen.

Beispiel: Resonanzspektroskopie für die logistische Abbildung

Als einfaches Beispiel soll sowohl als Modelldynamik als auch als Wunschdynamik eine logistische Abbildung vorliegen:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_{i+1} &= \tilde{f}(\tilde{y}_i) = \tilde{a}\tilde{y}(1-\tilde{y}) + K_i \\
y_{i+1} &= f(y_i) = ay(1-y) \\
x_{i+1} &= g(x_i) = a_g x(1-x) \\
\Longrightarrow K_i &= (a_g - a)x(1-x)
\end{aligned}$$

Das wahre System, das Modell- und das Wunschsystem unterscheiden sich hier in einem Parameter. Stimmt a mit $\tilde{a}$ überein, verschwindet die Abweichung von Ist- und Solldynamik (Abb. 5.6).

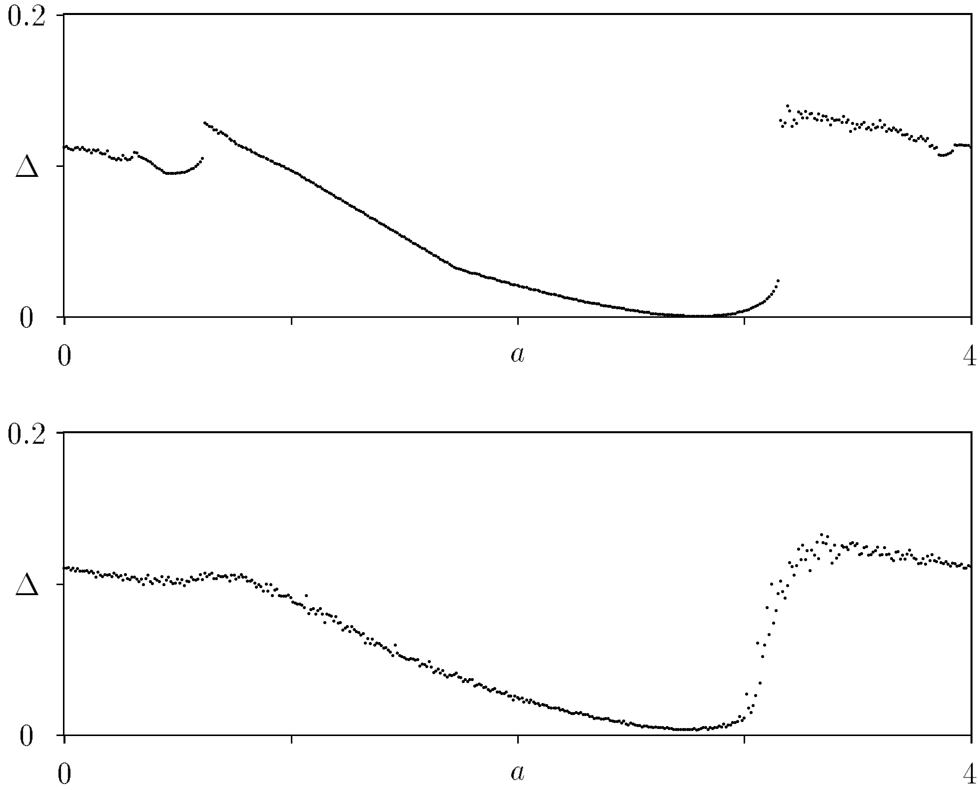


Abbildung 5.6: Die mittlere quadratische Abweichung der Ist- von der Solldynamik bei der Steuerung einer logistischen Abbildung mit $\tilde{a} = 2.8$ auf eine Solldynamik (hier eine logistische Abbildung mit $a_g = 2.0$) als Funktion des vermuteten Wertes für a. Die Mittelung erfolgte über 200 Iterationen nach einem Einschwingen von ebenfalls 200 Iterationen. Oben: ohne Rauschen. Unten: mit additivem gleichverteiltem Rauschen aus dem Intervall $[-0.1, 0.1]$

Kapitel 6

Anwendungsbeispiel: Resonante Steuerung des Pohl'schen Rades

Die Verfahren zur Modellbildung und Steuerung mit diskreten Modellen werden auf ein experimentelles System, eine nichtlineare Version des Pohl'schen Rades angewendet. Dabei soll explizit auf die Steuerung mit stroboskopischen Abbildungen eingegangen werden. Zur Steuerung mit Poincaré-Abbildungen wird auf die entsprechenden Arbeiten und Publikationen verwiesen [Geo89, GEHL89].

6.1 Versuchsaufbau

Aus der Versuchsbeschreibung zu Bild 6.1 ergibt sich folgende Modelldifferentialgleichung:

$$\ddot{y} + \mu\dot{y} + b_1 y + b_2 y^2 = 0 \tag{6.1}$$

Hierbei ist y die Winkeldifferenz zur Ruhelage, μ die Dämpfungskonstante, b_1 die Federkonstante und b_2 der Koeffizient des nichtlinearen Potentialterms. Die Parameter μ, b_1 und b_2 beinhalten bereits die Division durch das Trägheitsmoment θ des Schwingers. Die Zusatzmasse bewirkt einen Sinusterm im Potential bzw. einen Cosinusterm in der Kraft, der hier bis zur quadratischen Ordnung entwickelt wurde.

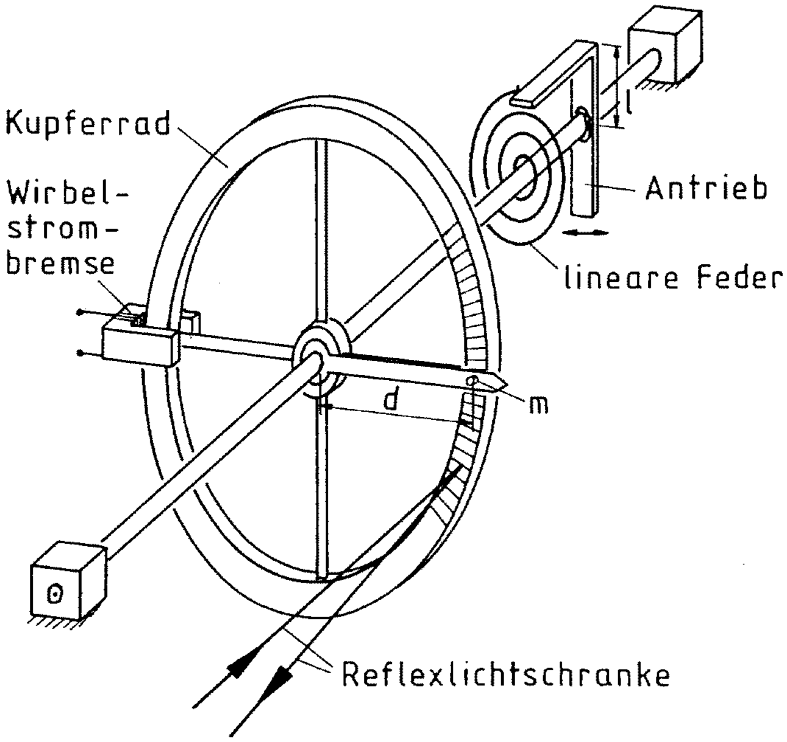


Abbildung 6.1: Versuchsaufbau zum nichtlinearen Pohl'schen Rad. Das Pohl'sche Rad ist ein Drehpendel, bestehend aus einer Kupferscheibe (Trägheitsmoment $\theta = 1.6 \cdot 10^{-3}$ kg·m^2), die über eine Spiralfeder mit einem Hebelarm (l=10cm) verbunden ist. Die Spiralfeder (D=0.0165 Nm/rad) bewirkt ein rückstellendes Drehmoment, das proportional ist zur Abweichung von der Ruhelage des Winkels zwischen Kupferscheibe und Hebelarmstellung. Eine Zusatzmasse (m=24g), die auf die Kupferscheibe montiert wird (d=8.5 cm), bewirkt durch ihre Schwerkraft (g=9.81 m/s^2) einen nichtlinearen Term in der Rückstellkraft. Die Drehung wird durch eine Wirbelstrombremse (I=300 mA) gedämpft. Weitere Daten zum Versuchsaufbau siehe [GEHL89, Wor92].
Die Messung des Winkels geschieht durch eine Doppellichtschranke, die einen Winkelstrichcode auf der Scheibe abliest. Die erreichte Genauigkeit lag bei 0.5°. Durch Bewegung des Hebelarms kann das System angeregt oder gesteuert werden. Dieser ist auf einen x-t-Schreiber montiert, der von einem PC mit D/A-Wandler gesteuert wird. Der PC verarbeitet auch die Ergebnisse des Reflexzählers. Die Meßfrequenz war 50 Hz, die Eigenfrequenz des Systems liegt bei etwa 0.5 Hz.

6.2 Modellbildung, Steuerung und Resonanzspektroskopie des Pohl'schen Rades mit Stroboskop-Abbildungen

6.2.1 Ermittlung guter Startwerte für die Modellparameter

Für kleine Zeitschritte τ läßt sich die Differentialgleichung (6.1) mit Hilfe eines Euler-Schritts in eine stroboskopische Abbildung umformen. Der Ansatz bis zu den wichtigen Moden (vgl. Abschnitt 2.2.4)

$$\begin{aligned} y(t+T) &= c_{10}(T)y(t) + c_{01}(T)\dot{y}(t) \\ \dot{y}(t+T) &= d_{10}(T)y(t) + d_{01}(T)\dot{y}(t) + d_{20}(T)y(t)^2 \end{aligned} \tag{6.2}$$

führt für $T = \tau$ auf $c_{10}(\tau) = 1$, $c_{01}(\tau) = \tau$, $d_{10}(\tau) = -b_1\tau$, $d_{20}(\tau) = -b_2\tau$ und $d_{01}(\tau) = 1 - \mu\tau$. τ ist hier das Meß- und Steuerintervall (20 ms) und damit klein im Vergleich zur Schwingungsdauer des Rades (> 2s).

Mit einem Least-Square-Fit gemäß Abschnitt 4.1.1 wurden ungefähre Werte für die Parameter b_1, b_2 und μ bestimmt. Zur Bestimmung von μ wurde dazu der in Abschnitt 4.1.2 erwähnte Trick zur verbesserten Bestimmung der vom Langzeitverhalten bestimmten Parameter verwendet:

Zuerst verschafft man sich die exakten Ausdrücke für die fünf wichtigen Koeffizienten gemäß Abschnitt 2.2.4:

$$\begin{aligned}
c_{10}(T) &= \frac{D_2 e^{D_1 T} - D_1 e^{D_2 T}}{D_2 - D_1} \\
c_{01}(T) &= \frac{e^{D_2 T} - e^{D_1 T}}{D_2 - D_1} \\
c_{20}(T) &= b_2 \frac{1}{(D_2 - D_1)^2} \Big(\frac{3D_1^2 - 2D_2^2 - D_1 D_2}{D_1(2D_2 - D_1)} e^{D_1 T} + \frac{3D_2^2 - 2D_1^2 - D_1 D_2}{D_2(2D_1 - D_2)} e^{D_2 T} \\
&+ 2e^{(D_1+D_2)T} - \frac{D_2^2}{D_1(2D_1 - D_2)} e^{2D_1 T} - \frac{D_1^2}{D_2(2D_2 - D_1)} e^{2D_2 T} \Big) \\
d_{10}(T) &= \frac{D_2 D_1}{D_2 - D_1} (e^{D_1 T} - e^{D_2 T}) \\
d_{01}(T) &= \frac{D_2 e^{D_2 T} - D_1 e^{D_1 T}}{D_2 - D_1} \\
d_{20}(T) &= b_2 \frac{1}{(D_2 - D_1)^2} \Big(\frac{3D_1^2 - 2D_2^2 - D_1 D_2}{D_1(2D_2 - D_1)} D_1 e^{D_1 T} + \frac{3D_2^2 - 2D_1^2 - D_1 D_2}{D_2(2D_1 - D_2)} D_2 e^{D_2 T} \\
&+ 2(D_1 + D_2) e^{(D_1+D_2)T} - \frac{2D_2^2}{2D_1 - D_2} e^{2D_1 T} - \frac{2D_1^2}{2D_2 - D_1} e^{2D_2 T} \Big) \quad \text{mit}
\end{aligned}$$

$$D_{1,2} = -\mu/2 \pm i\sqrt{4b_1 - \mu^2}/2$$

Damit ist eine Relation zwischen den Koeffizienten für verschiedene T gegeben. So läßt sich der Koeffizient $d_{01}(T)$ für Werte von T durch Fit ermitteln, die etwa ein Viertel der Schwingungsperiode des Systems betragen und damit das Dämpfungsverhalten wesentlich präziser widerspiegeln als kleine Zeitschritte. Den für die Steuerung brauchbaren Wert $d_{01}(\tau)$ kann man nun aus den obigen Formeln ermitteln.

6.2.2 Steuerung

Ausgehend von den oben ermittelten Modellparametern wurde das Modell im Computer iteriert und eine Steuerkraft

$$F_i = -2c\mu\tau w_i \tag{6.3}$$

auf das System angewendet. Da die Stroboskopierzeit klein gegenüber der Schwingungsdauer ist, ist die Dynamik zwischen zwei diskreten Zeitpunkten sicher glatt. Damit wählt man zur Kraftübertragung Methode 3 (Seite 59). Die Konstante c beinhaltet zwei andere Systemparameter: den Hebelarm und die Verstärkung des $x-t$-Schreibers. Die zu dieser Steuerkraft gehörige Solldynamik

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \tau\, w_i \\ w_{i+1} &= -b_1\tau\, y_i - b_2\tau\, y_i^2 + (1+\mu\tau)w_i \end{aligned} \tag{6.4}$$

ist eine Zeitspiegelung des Ausschwingverhaltens und damit eine resonante Anregung des Schwingers [RHL87].

6.2.3 Resonanzspektroskopie

Nun wurden verschiedene Modellparameter variiert und dabei die mittlere Abweichung des Ist- vom Sollverhalten registriert. Die jeweils anderen Parameter wurden auf den Wert gesetzt, der sich durch obige Abschätzung ergab.

Das Resultat sind Resonanzkurven, deren Minimum die optimalen Parameter ergibt.

Die Wirkung einer Steuerung, die auf den so ermittelten Parametern beruht, zeigt Abbildung 6.3. Die mittlere Abweichung zwischen Soll- und Istdynamik beträgt nur etwa 1°.

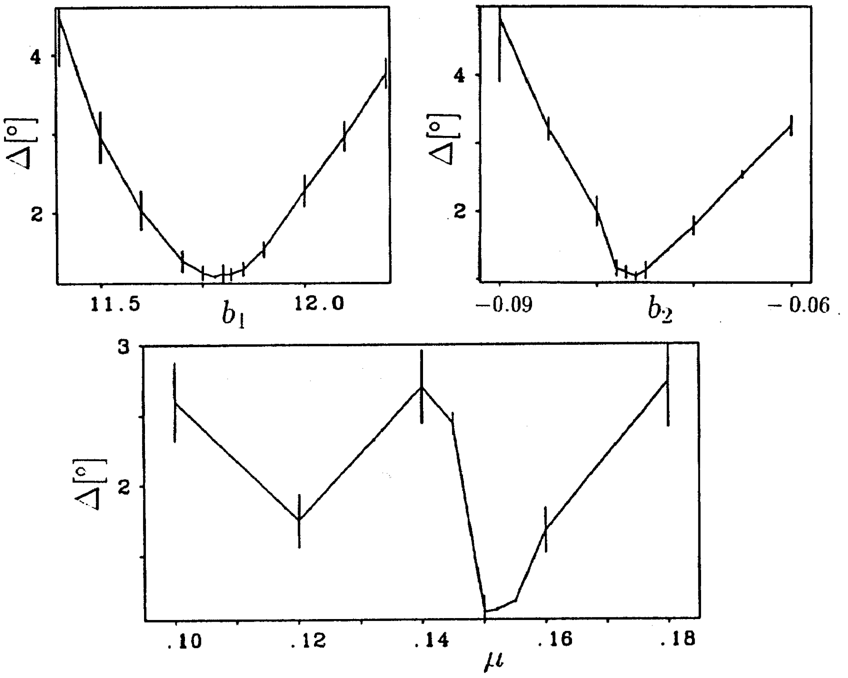


Abbildung 6.2: Die mittlere Abweichung der Ist- von der Solldynamik als Funktion des Modellparameters (Resonanzspektroskopie) für b_1, b_2 und μ. Die Fehlerbalken wurden durch zehnmalige Wiederholung des Versuchs ermittelt. Die Lage des Minimums bestimmt den optimalen Wert mit einer Genauigkeit von 0.4% für b_1, 1.5% für b_2 und 2% für μ.

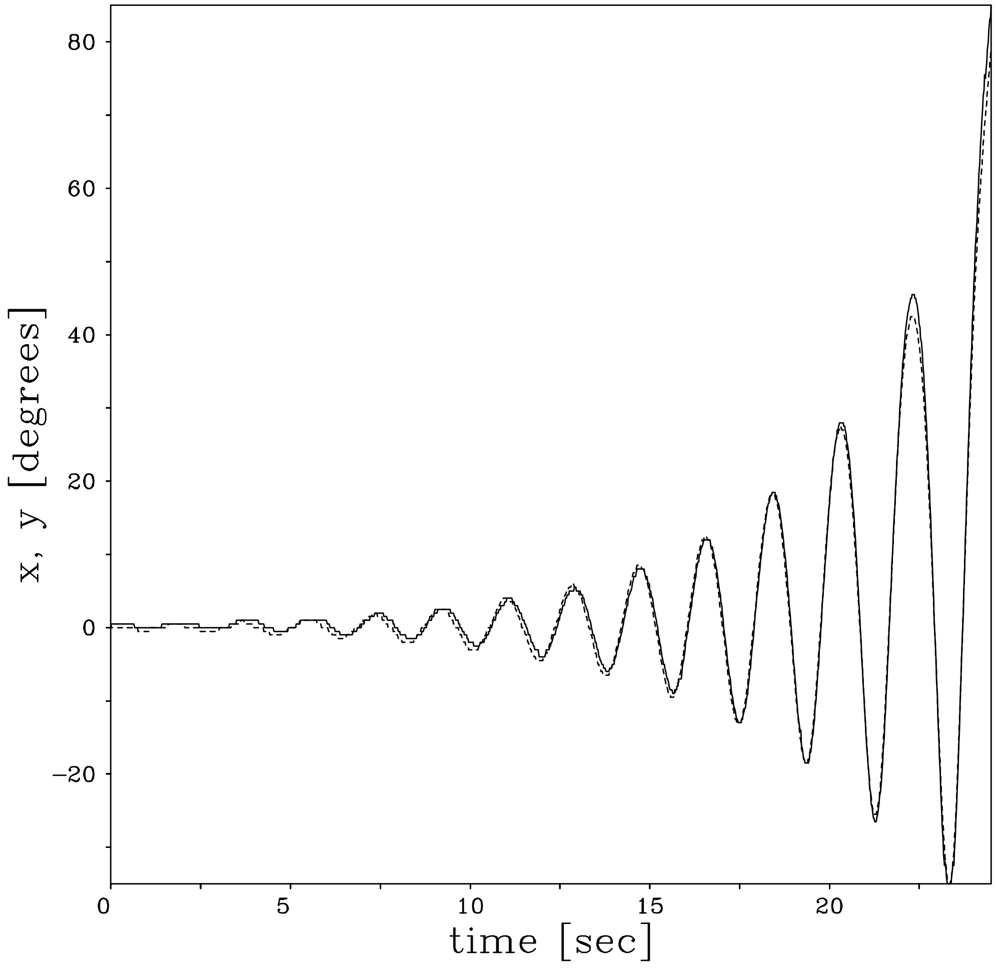


Abbildung 6.3: Direkter Vergleich zwischen Solldynamik (gestrichelte Kurve) und Istdynamik (durchgezogene Kurve). Der Unterschied verschwindet größtenteils innerhalb der Strichbreite.

Anhang A

Steuerung eines Freistrahls

In diesem Anhang soll ein Versuch beschrieben werden, mit dessen Hilfe die wesentlichen Effekte zur Steuerung komplexer Systeme veranschaulicht werden können. Im wesentlichen soll dieser Abschnitt als ein Beitrag zur Didaktik in der Physik verstanden werden. Es wurde deshalb darauf geachtet, den Versuch verständlich zu beschreiben und einen Aufbau zu verwenden, der mit einfachen Mitteln nachgebaut werden kann.

Ein tropfender Wasserhahn ist eines der aus dem Alltag bekannten Beispiele für einen Übergang von periodischer zu chaotischer Dynamik [CFPS86]: Ist der Hahn fast geschlossen (oder undicht), fallen in periodischer Folge Tropfen auf den Boden. Diese Dynamik läßt sich aufgrund ihrer strengen Periodizität auch gut vorhersagen.

Bei kleinem Zufluß bildet das Wasser an der Mündung des Hahns Tropfen. Erreichen sie eine kritische Größe, überwiegt die Schwerkraft die Adhäsionskräfte, und die Tropfen fallen zu Boden.

Auch das Fallen ist gut beschreibbar, im wesentlichen durch das Gesetz

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

Hier ist y die Höhe des Tropfens über dem Boden, y_0 die Höhe der Wasserhahnmündung, g die Fallbeschleunigung ($\approx 9.81\frac{m}{s^2}$) und t die Zeit, die nach dem Ablösen des Tropfens vom Hahn vergangen ist.

Anders sieht die Sache aus, wenn der Hahn weiter geöffnet wird: Das einfache periodische Verhalten wird durch doppelt-periodisches Verhalten (das Tropfen bekommt „Rhythmus“) abgelöst, das über weitere Periodenverdopplungen [1] ins Chaos übergeht. Jetzt kann man nicht mehr vorhersagen, wann sich ein Tropfen ablösen wird.

---

[1] Wenn der Versuch mit dem Wasserhahn zuhause ohne geeignete Meßeinrichtungen durchgeführt wird, lassen sich diese weiteren Verdopplungen allerdings schlecht beobachten.

Für den Ablöseprozeß spielen nun auch Trägheitseffekte eine Rolle; das Modell, das nur Adhäsionskräfte und Schwerkraft beinhaltet, reicht offensichtlich nicht mehr aus. Trotzdem kann die Dynamik bei nicht zu großem Durchfluß noch mit wenigen Variablen beschrieben werden [REHL88]. Weiteres Erhöhen des Durchflusses führt zu einem im oberen Bereich zusammenhängenden Strahl, der weiter unten in unvorhersehbarer Weise in einzelne Tropfen zerfällt.

In diesem Durchflußbereich läßt sich der Strahl gut steuern, indem man den Hahn mit kleinen Vibrationen anregt [Dyk82, S.73], [RJ71], [RJ70].

Dabei kann man völlig periodische Ablösungen von Tropfen erreichen — die Strahldynamik wird wieder vorhersehbar. Man kann sagen, daß die Steuerung die Komplexität des Systems vermindert hat.

Freilich gelingt die Steuerung nicht mit jeder beliebigen Steuerkraft. Vielmehr muß die Kraft gut an die Eigendynamik des Systems angepaßt sein. Sie hängt natürlich auch von der gewünschten Dynamik ab (vgl. Drehpendel, Kapitel 6).

A.1 Versuchsaufbau

Um das Experiment durchzuführen, muß ein senkrechtstehendes Rohr, das die Rolle des Wasserhahns übernimmt, in longitudinale Schwingungen, d. h. Auf- und Abbewegungen versetzt werden. Dies kann z. B. dadurch geschehen, daß man auf die Membran eines Lautsprechers ein Gestell aus Kunststoff aufklebt, wie in Abb. A.1 dargestellt. Daran ist ein kurzes Glasrohr befestigt, etwa durch ein Loch in dem Kunststoffgestell. Es ist streng darauf zu achten, daß sämtliche Befestigungen gegenüber mechanischen Schwingungen stabil sind; auch der Lautsprecher sollte gut festgeklemmt werden. Das Kunststoffgestell sollte die Membran möglichst symmetrisch belasten und der Lautsprecher sollte eher zu groß als zu klein gewählt werden, um Scherschwingungen zu vermeiden. Auf dem Kunststoffgestell wird eine kleine Spule aufgeklebt, die sich mit dem Gestell und dem Rohr mitbewegt.

Die Ansteuerung des Lautsprechers bzw. des Schwingungssystems erfolgt durch einen Funktionsgenerator, oder besser durch einen PC mit ADC-Karte und nachgeschaltetem Verstärker. Damit kann man beliebige Funktionen $f(t)$, $0 < t < T$ in periodischer Wiederholung auf das Schwingungssystem geben. Für die Versorgung mit Flüssigkeit eignet sich ein Überlaufgefäß besonders gut, da so am besten ein konstanter Flüssigkeitsstrom aufrechterhalten wird. Mit einer Spule, über der ein kleiner Magnet fest installiert wird, und einem Oszilloskop läßt sich die eigentliche Bewegung des Ausflußrohres und damit die zeitliche Modulation der Ausfließgeschwindigkeit beobachten.

Abbildung A.1: Versuchsaufbau zur Steuerung des Wasserstrahls

A.2 Erzeugung wählbarer Wellenformen

Verwendet man zur Ansteuerung des Lautsprechers ein sinusförmiges Signal, so kann man zwar einzelne Tropfen erzeugen, eine andere Solldynamik läßt sich so allerdings schlecht erreichen. Für komplexere periodische Tropfenfolgen muß man komplexere Wellenformen verwenden. Zu ihrer Erzeugung gibt es verschiedene Möglichkeiten; der Leser sei hiermit angeregt, sich auch neue einfallen zu lassen. Das Spektrum der einsetzbaren Apparate reicht von Computern mit D/A-Wandler bis zu Synthesizern.

Hier wird ein Gerät beschrieben werden, das für ca. 100 Mark zu bauen ist und den

Vorteil besitzt, daß man die eingestellte Wellenform grafisch sofort ablesen kann.

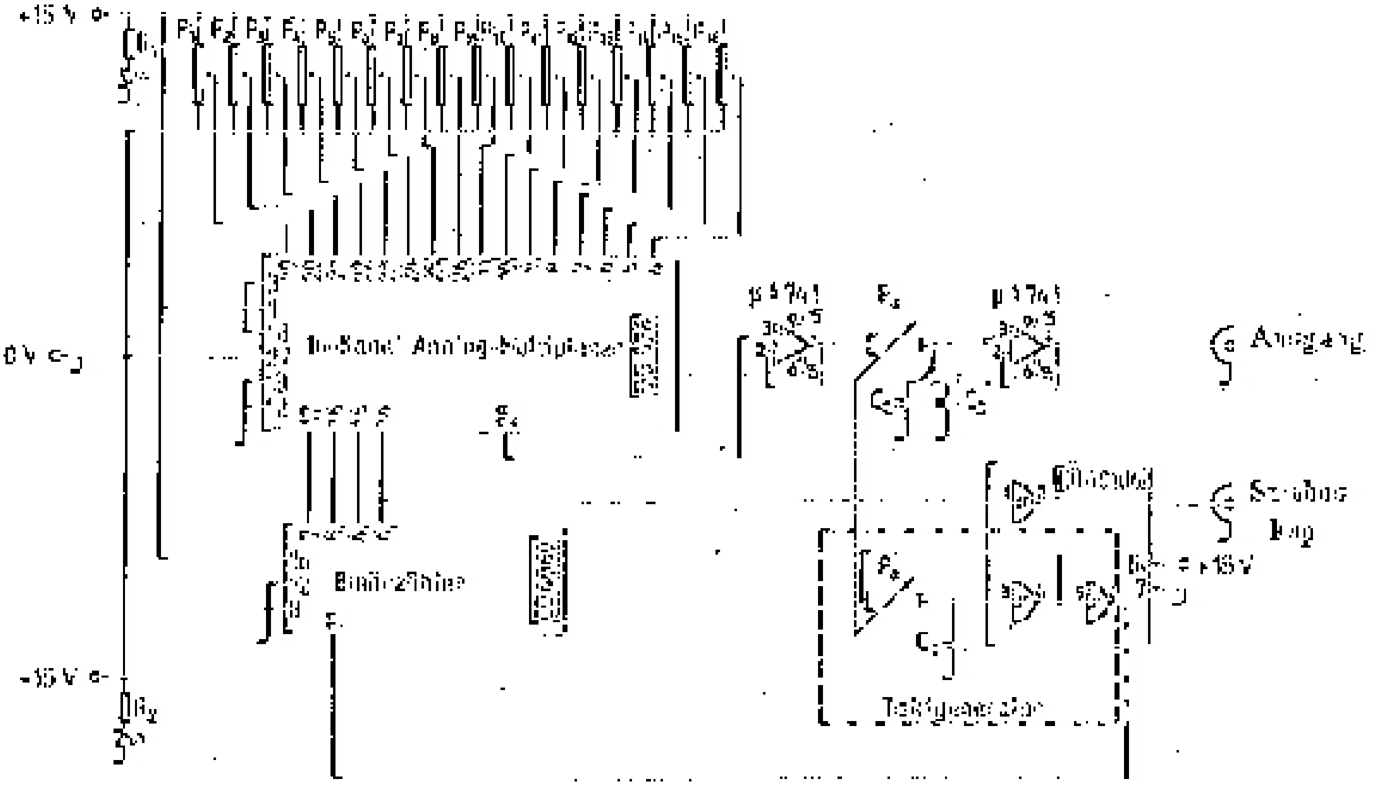


Abbildung A.2: Schaltbild zum Wellenformgenerator

Das Prinzip ist sehr einfach: Mit einem Multiplexer wird zyklisch eine aus 16 mit je einem Schieberegler einstellbaren Spannungen ausgewählt. Die Wellenform, die sich dabei ergibt, hat die Gestalt einer Treppenkurve mit variablen Stufenhöhen. Die Ecken kann man mit einem nachgeschalteten Tiefpaß abrunden. Die Eckfrequenz des Tiefpasses wird simultan mit der Auswahlfrequenz verstellt, damit sich die Wellenform bei Variation der Frequenz nicht ändert.

Zur Ansteuerung des Multiplexers wird ein Binärzähler mit Taktgenerator verwendet. Will man das Stroboskop mit dem Wellenform-Generator synchronisieren, schließt man dieses an das höchstwertige Bit des Zählers an. Diesen Synchronisationsausgang sollte man ebenso wie den Signalausgang puffern, um ihn gegen Kurzschluß zu sichern.

A.3 Verwendung stroboskopischen Lichts

Den Erfolg der Steuerung kann man bei gewöhnlicher Beleuchtung nicht beobachten, weil die Tropfen so schnell fallen, daß man sie nicht einzeln identifizieren kann. Deshalb ist es naheliegend, ein Stroboskop zu verwenden. Fallen die Tropfen periodisch, erhält man ein stehendes Bild, wenn die Stroboskopfrequenz mit der Tropfenfrequenz übereinstimmt und jeder Tropfen während des Falls die gleichen Formveränderungen erfährt.

In der Tat kann man Einstellungen von Wellenform, Amplitude und Durchfluß finden, die zu verblüffend exakten Wiederholungen in der Tropfenform führen. Verstellt man die Stroboskopfrequenz nur leicht, erhält man ein Bild langsam fallender oder steigender Tropfen. Man kann dann beobachten, daß die Tropfen in sich recht komplizierte Schwingungen ausführen. Durch die Steuerung wird erreicht, daß auch diese Bewegungsformen periodisch werden. Es gibt allerdings auch Einstellungen, die die Dynamik des Strahls verkomplizieren. Zum Beispiel treten manchmal unerwartet Seitenstrahlen mit chaotischen Tropfenfolgen auf, die im ungesteuerten System gar nicht vorhanden waren. Die Eigendynamik des Systems läßt sich durch das Spektrum von Anregungen und erzielter Dynamik charakterisieren.

Es ist bekannt, daß periodische Vorgänge bei Beleuchtung mit stroboskopischem Licht wie in Zeitlupe erscheinen, wenn die Stroboskopfrequenz nur leicht von der Schwingungsfrequenz abweicht. Man kann diesen Effekt ausnutzen, wenn man die Tropfen auf eine ebene Fläche auftreffen läßt und dann wie beschrieben beleuchtet. Das Auseinanderspritzen eines Tropfens kann nun wunderbar beobachtet werden. Wählt man die Stroboskopfrequenz etwas höher als die Schwingungsfrequenz des Lautsprechers, scheinen die Tropfen nach oben zu „fallen“.

Zusammenfassung zum Wasserstrahlversuch

Gesteuerte komplexe Systeme können einfacher als die ungesteuerten Systeme sein, wenn die Steuerung richtig gewählt wird.

Die Steuerkräfte können sehr klein sein.

Zeitlupeneffekte erhält man durch Beleuchtung eines periodischen Strahls mit einem Stroboskop, das fast mit der Tropfenfrequenz blitzt.

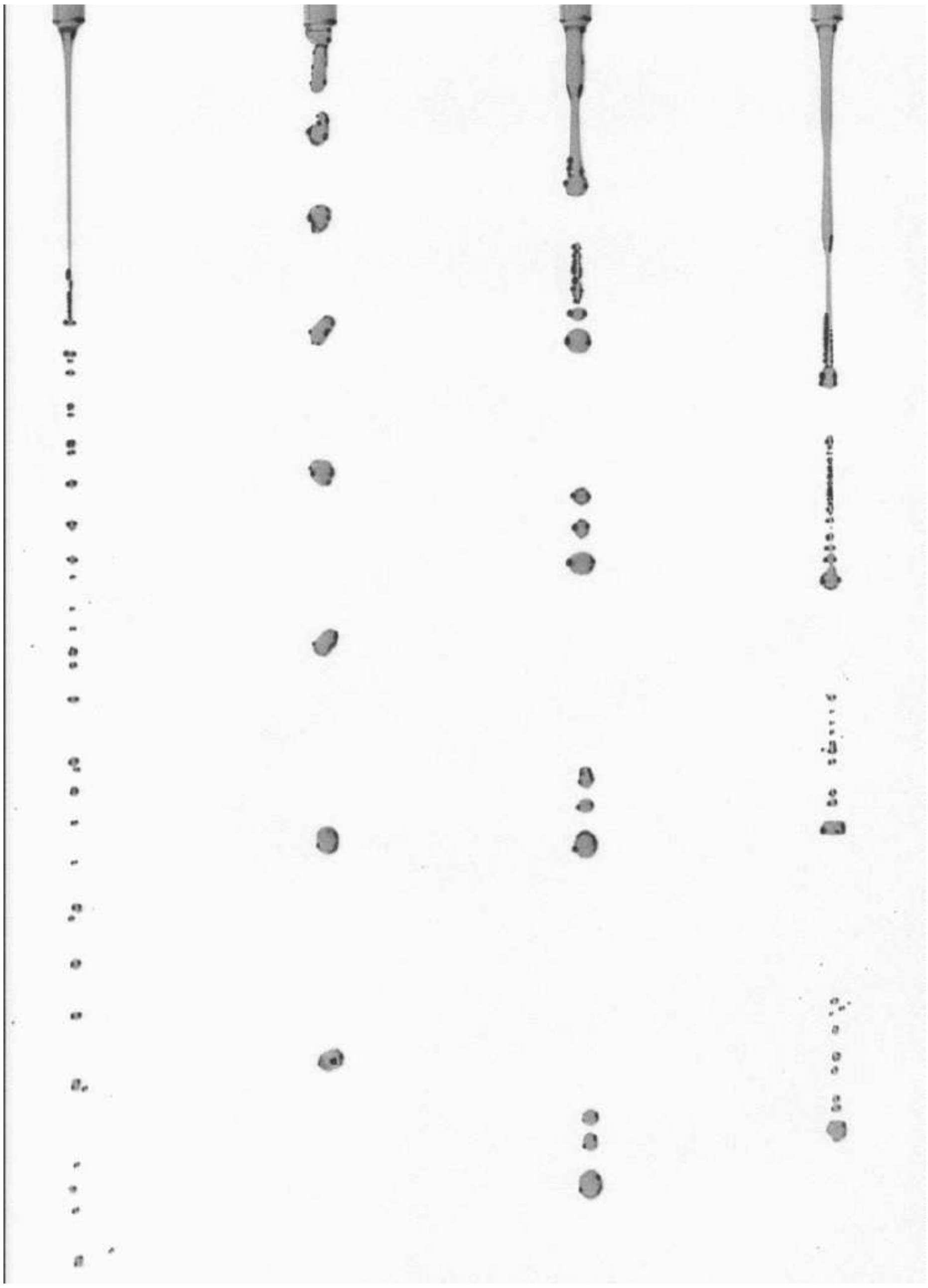


Abbildung A.3: Steuerung eines Wasserstrahls zu periodischer Dynamik. Links: ungesteuerter Strahl, daneben 3 gesteuerte Tropfenfolgen für verschiedene Wellenformen der periodischen Anregung. Foto: Ulli Köster, Chaos-Gruppe

Anhang B

Mathematica-Programme

B.1 MATHEMATICA-Programm zur Maximumsuche mit algebraischer Bisektion

```
(* bise.m  Algebraic Bisection for n variables. Version: 06.09.89, 17:59 *)
(* Features:
   + own CoefficientList
   + Divide into 4 parts
   x Careful search strategie (to be implemented)
   + arbitrary dimensions
   - estimation: moredim: neglecting negative coefficients
   + estimation: onedim: summing up in a smart way
   + no Breaks[ ] in (More)CleanMaxList
*)
Unprotect[Power]
0^0   := 1
0. ^0 := 1
Protect[Power]

Sub[f_,x_,y_] := If[x=={},f,Sub[f,Rest[x],Rest[y]]/.x[[1]]->y[[1]]]

(* summ[i_,j_] := Block[{ee},
                      ee=e[[i,j]];
                      If[ee>0,e[[i,j]]=0;ee,0] +
                      If[i<m,summ[i+1,j],0] +
                      If[j<n,summ[i,j+1],0]
                    ] *)

Major[f_,x_] := Block[{fe,co,cl,i,su=0},
                      If[CheckMaxDim==1,
                         cl=CoefficientList[f,x[[1]]];
                         For[i=Length[cl], i>=1, i--,
                             su=su+cl[[i]]; If[su<0,su=0]];
                         su,
                         fe = Expand[f];
                         If[TrueQ[Head[fe]==Plus],
                            Sum[co=fe[[i]]; If[Head[co]==Times,co=fe[[i,1]]];
                                If[co<0,0,co,1], {i,1,Length[fe]}],
                            co=If[Head[fe]==Times,fe[[1]],fe,fe];
                            If[co<0,0,co,1]
```

```
                           ]
                        ]
                     ]
Major::usage = " Major[f,{x1,x2,...}] determins the value
                 of a majorant of f at the point (x1=1, x2=1, ...)"

Surepos[g_,x_,a_,b_] := Block[{g1,Sya},
                              Sya=Array[Sy,Dimensions[x]];
                              g1 = Sub[g,x,a];
                              Major[g1-Sub[g,x,(Sya(b-a)+a)],Sya] < g1
                             ]

Bounds[g_,x_,a_,b_] := Block[{g1,Bya},
   (* lower and upper bounds of g in interval  *)
                            g1 = Sub[g,x,a];
                            Bya=Array[By,Dimensions[x]];
                            {g1 - Major[g1-Sub[g,x,(Bya(b-a)+a)], Bya],
                             g1 + Major[Sub[g,x,(Bya(b-a)+a)]-g1, Bya]}
                           ]


CleanMaxList[T_] := Block[{i,j,flag,hl={}},
                      For[i=1, i<=Length[T], i++,
                          flag=True;
                          For[j=1, j<=Length[T] && TrueQ[flag], j++,
                              flag = T[[j,1,1]]<T[[i,1,2]]
                             ];
                          If[flag==True,
                             AppendTo[hl,T[[i]]],
                             Print["CleanMaxList has hit one !"],
                             Print["flag in CML :",FullForm[flag]];
                             AppendTo[schrott,T[[i]]]
                            ]
                         ];
                      hl
                     ]

MoreCleanMaxList[T_] :=
     Block[{i,j,flag,hl={}},
            For[ i=1, i<=Length[T], i++,
                 flag=True;
                 For[ j=1, j<=Length[Checkx] && TrueQ[flag], j++,
                      If[T[[i,3,j]]!=Checkb[[j]],
                         flag = !Surepos[CheckD[[j]],Checkx,T[[i,2]],T[[i,3]]]
                        ]
                    ];
                 For[ j=1, j<=Length[Checkx] && TrueQ[flag], j++,
                      If[T[[i,2,j]]!=Checka[[j]],
                         flag = !Surepos[-CheckD[[j]],Checkx,T[[i,2]],T[[i,3]]]
                        ]
                    ];
                 If[flag==True,
                    AppendTo[hl,T[[i]]],
                    Print["MoreCleanMaxList has hit one !"],
                    Print["flag in MCML:",FullForm[flag]];
                    AppendTo[schrott,T[[i]]]
                   ]
               ];
            hl
          ]

DevideInt[a_,b_,i_] :=
  (* Devide 1 Interval in respect to variable [i] *)
            Block[{m1,m2,m3,t1b,t2a,t2b,t3a,t3b,t4a},
                  (* Print["DevideInt[",a,",",b,",i=",i]; *)
```

```
                  m2=(a[[i]]+b[[i]])/2;
                  m1=(a[[i]]+m2)/2;
                  m3=(m2+b[[i]])/2;
                  t1b=b; t1b[[i]]=m1;
                  t2a=a; t2a[[i]]=m1;
                  t2b=b; t2b[[i]]=m2;
                  t3a=a; t3a[[i]]=m2;
                  t3b=b; t3b[[i]]=m3;
                  t4a=a; t4a[[i]]=m3;
                  {{Bounds[Checkg,Checkx,a,t1b],a,t1b},
                   {Bounds[Checkg,Checkx,t2a,t2b],t2a,t2b},
                   {Bounds[Checkg,Checkx,t3a,t3b],t3a,t3b},
                   {Bounds[Checkg,Checkx,t4a,b],t4a,b}}
                 ]

CheckMaxList[T_,n_] :=
           Block[ {i,d,hl,nl,p},
                  If[n==0,
                     T,
                     hl=T;
                     For[ d=1, d<=CheckMaxDim, d++,
                          Print["Dividing variable ",d];
                          nl={};
                          For[ i=1, i<=Length[hl], i++,
                               nl=Join[nl,DevideInt[hl[[i,2]],hl[[i,3]],d]]
                             ];
                          Print[Length[nl]," Intervals. Starting Clean-Up."];
                          hl=MoreCleanMaxList[CleanMaxList[nl]]
                        ];
                     CheckMaxList[hl,n-1]
                    ]
                ]

AbsMax::usage =
"AbsMax[g,{x1,x2,...},{a1,a2,...},{b1,b2,...},n,sl]
 gives a list of intervals in one of that the absolute
 maximum of f in a1<x1<b1, a2<x2<b2, ... lies.
 n is the desired number of recursive subdivisions
 The list sl can be inputted as a starting list."

AbsMax[g_,x_,a_,b_,n_:1,sl_:{}] :=
            Block[ {i},
                    schrott = {};
                    Checka = a;
                    Checkb = b;
                    Checkg = g;
                    Checkx = x;
                    CheckMaxDim=Length[x];
                    CheckD = Table[D[g,x[[i]]],{i,Length[x]}];
                    If[sl=={},
                       CheckMaxList[{{{low,high},a,b}},n],
                       CheckMaxList[sl,n]]
                 ]

(* prec and mach are useful routines for demonstration *)

prec[T_] := N[T[[1,3]]-T[[1,2]]]

mach[f_,var_,a_,b_,n_:5,width_:132] :=
              Block[{i,j},
                    ResetMedium[PageWidth->132];
                    intlist={};
                    For[ i=1; tl={}, i<=n, i++,
                        Print[" "];
                        AppendTo[tl,Reverse[
```

```
                           Timing[intlist=AbsMax[f,var,a,b,1,intlist];i]]];
                        tl >> bise.tl;
                        Print[tl[[i]]," Precision=",prec[intlist]];
                        Print[Length[intlist],
                              " Intervals remaining:
 {{f1,f2},{a1,a2,...},{b1,b2,....}"];
                        For[j=1, j<=Length[intlist], j++,
 Print[N[intlist[[j]],16]]]
                       ];
                    If[$Display=={},$Display="bise.ps"];
                    ListPlot[tl/.Second->1,
                             PlotJoined->True,
                             AxesLabel->{"Iterations","CPUs per Iteration"}
                            ]
                   ]

(* Example Cube *)
cube = 100(x2-x1^3)^2 + (1-x1)^2
Plot3D[-cube,{x1,-1,2},{x2,-1,2},PlotLabel->"Cube"]
machcube[n_:5] := mach[-cube,{x1,x2},{-1,-1},{2,2},n,80]

(* Example Beale *)
beale = (3/2 - x1(1-x2))^2 + (9/4 - x1(1-x2^2))^2 + (21/8 - x1(1-x2^3))^2
Plot3D[-beale,{x1,-1,2},{x2,-1,2},PlotLabel->"Beale"]
machbeale[n_:5] := mach[-beale,{x1,x2},{-1,-1},{2,2},n,80]

(* Example Wood *)
wood = 100(x2-x1^2)^2 + (1-x1)^2 + 90(x4-x3^2)^2 + (1-x3)^2 +
       (101/10)((x2-1)^2+(x4-1)^2) + (198/10)(x2-1)(x4-1)
machwood[n_:5] := mach[-wood,{x1,x2,x3,x4},{-1,-1,-1,-1},{2,2,2,2},n,80]

(* Example n dim. *)
machn[n_] := Block[{xx,aa},
                   xx = Array[x,{n}];
                   aa = Table[-1,{n}];
                   spin = Expand[Sum[-(x[i]-1/3)^2,{i,1,n}]];
                   Print[spin];
                   mach[spin,xx,aa,-aa,10,132]
                  ]
```

B.2 MATHEMATICA-Programm zur Maximumsuche durch Potenzierung und Fit

```
Unprotect[Times]
0. _ := 0
Protect[Times]

MaxFitWeightPower = 2

MaxFit1[fp_,{x_,a_,b_}] := Block[{A,B,dA,a4,a3,a2,a1,a0,fpn,alpha,beta,gamma},
                            fpn = fp^MaxFitWeightPower;
                            Array[A,{3,3}];
                            Array[B,{3}];
                            Print["Calculating a4"];
                            a4 = Integrate[Expand[fpn x^4],{x,a,b}];
                            Print["Calculating a3"];
                            a3 = Integrate[Expand[fpn x^3],{x,a,b}];
                            Print["Calculating a2"];
                            a2 = Integrate[Expand[fpn x^2],{x,a,b}];
                            Print["Calculating a1"];
                            a1 = Integrate[Expand[fpn x],{x,a,b}];
                            Print["Calculating a0"];
                            a0 = Integrate[Expand[fpn], {x,a,b}];
                            A = {{a4,a3,a2},{a3,a2,a1},{a2,a1,a0}};
                            dA = Det[A];
                            Print[StringForm["Determinant=‘‘",dA]];
                            B = {Print["Calculating b2"];
                                 Integrate[Expand[fpn fp x^2],{x,a,b}],
                                 Print["Calculating b1"];
                                 Integrate[Expand[fpn fp x],{x,a,b}],
                                 Print["Calculating b0"];
                                 Integrate[Expand[fpn fp],{x,a,b}]};
                            alpha = Det[{B,{a3,a2,a1},{a2,a1,a0}}]/dA;
                            beta  = Det[{{a4,a3,a2},B,{a2,a1,a0}}]/dA;
                            gamma = Det[{{a4,a3,a2},{a3,a2,a1},B}]/dA;
                           (* Plot[{fp,alpha x^2+beta x+gamma},{x,a,b}]; *)
                            {alpha,beta,gamma}
                           ]

MaxFind1::usage = "MaxFind1[f,{x,a,b},mfp] finds the absoulute Maximum of a
 non-negative
                   function f[x] in the interval a<x<b.
                   mfp is the used power, can be omitted, default is 8."
MaxFind1[f_,{x_,a_,b_},mfp_:8] :=
                           Block[{k,d,w},
                            Print[StringForm["Interval ‘‘,
 MaxFitPower=‘‘",{a,b},mfp]];
                            MaxFitResult = MaxFit1[f^mfp,{x,a,b}];
                            ka=MaxFitResult[[1]];
                            kb=MaxFitResult[[2]];
                            kc=MaxFitResult[[3]];
                            k =kb/(-2 ka);
                            d =kb^2 - 4 ka kc;
                            fehlb = Sqrt[d]/(2 ka);
                            k
                           ]

MaxFit2[fp_,{x1_,a1_,b1_},{x2_,a2_,b2_}] :=
         Block[{A,B,a40,a22,a04,a30,a03,a21,a12,a20,a02,a11,a10,a01,a00,fpn,r,
```

```
                c20,c02,c10,c01,c00},
                fpn = fp^MaxFitWeightPower;
                Array[A,{5,5}];
                Array[B,{5}];
                a40 = Integrate[Expand[fpn x1^4],{x1,a1,b1},{x2,a2,b2}];
                a04 = Integrate[Expand[fpn x2^4],{x1,a1,b1},{x2,a2,b2}];
                a22 = Integrate[Expand[fpn x1^2 x2^2],{x1,a1,b1},{x2,a2,b2}];
                a30 = Integrate[Expand[fpn x1^3],{x1,a1,b1},{x2,a2,b2}];
                a03 = Integrate[Expand[fpn x2^3],{x1,a1,b1},{x2,a2,b2}];
                a21 = Integrate[Expand[fpn x1^2 x2],{x1,a1,b1},{x2,a2,b2}];
                a12 = Integrate[Expand[fpn x1 x2^2],{x1,a1,b1},{x2,a2,b2}];
                a20 = Integrate[Expand[fpn x1^2],{x1,a1,b1},{x2,a2,b2}];
                a02 = Integrate[Expand[fpn x2^2],{x1,a1,b1},{x2,a2,b2}];
                a11 = Integrate[Expand[fpn x1 x2],{x1,a1,b1},{x2,a2,b2}];
                a10 = Integrate[Expand[fpn x1],{x1,a1,b1},{x2,a2,b2}];
                a01 = Integrate[Expand[fpn x2],{x1,a1,b1},{x2,a2,b2}];
                a00 = Integrate[Expand[fpn],{x1,a1,b1},{x2,a2,b2}];

                A = {{a40,a22,a30,a21,a20},
                     {a22,a04,a12,a03,a02},
                     {a30,a12,a20,a11,a10},
                     {a21,a03,a11,a02,a01},
                     {a20,a02,a10,a01,a00}};
                Print[TableForm[A]];
                Print[StringForm["Determinant=‘‘",Det[A]]];
                B = {Integrate[Expand[fpn fp x1^2],{x1,a1,b1},{x2,a2,b2}],
                     Integrate[Expand[fpn fp x2^2],{x1,a1,b1},{x2,a2,b2}],
                     Integrate[Expand[fpn fp x1],{x1,a1,b1},{x2,a2,b2}],
                     Integrate[Expand[fpn fp x2],{x1,a1,b1},{x2,a2,b2}],
                     Integrate[Expand[fpn fp],{x1,a1,b1},{x2,a2,b2}]};
                r = Solve[A.{c20,c02,c10,c01,c00}==B];
                Flatten[{c20,c02,c10,c01,c00}/.r]
               ]

MaxFind2[f_,{x1_,a1_,b1_},{x2_,a2_,b2_},mfp_:8] :=
          Block[{k},
                 MaxFitResult = MaxFit2[f^mfp,{x1,a1,b1},{x2,a2,b2}];
                 k20=MaxFitResult[[1]];
                 k02=MaxFitResult[[2]];
                 k10=MaxFitResult[[3]];
                 k01=MaxFitResult[[4]];
                 k00=MaxFitResult[[5]];
                 {-k10/(2 k20), -k01/(2 k02)}
               ]

machmfp = 10

test = 10 - (x1-0.2)^2 - (x2-0.4)^2

mach2 := MaxFind2[test,{x1,-1,1},{x2,-1,1},machmfp]

fit2 := k20 x1^2 + k02 x2^2 + k10 x1 + k01 x2 + k00

fit1 := ka x^2 + kb x + kc
```

Anhang C

Lebenslauf

Werner Eberl, geb. 23.02.1962 in München
Eltern: Ernst Eberl und Ruth Eberl, geb. Wurst

1968-71	Grundschule in München-Pasing
1971-80	Max-Planck-Gymnasium München-Pasing
1980-86	freier Mitarbeiter bei der Schneider Software GmbH
1980-87	Studium Physik A an der TU München
1986/87	Diplomarbeit: „Ermittlung von stroboskopischen Abbildungen aus gewöhnlichen, nichtlinearen Differentialgleichungen“
1987-91	Aufbaustudium Umweltschutztechnik an der TU München
1987-92	Promotion am Physik-Department der TUM bei Prof. Lüscher, nach dessen Tod 1990 bei Prof. Sackmann
1989/91	Forschungsaufenthalte am Center for Complex Systems Research, Beckman Institute, Univ. of Illinois at Urbana-Champaign
ab SoSe '92	Studium der Soziologie an der LMU München
seit 1987	freier Mitarbeiter bei der MAN Technologie AG
seit 1990	2. Vorsitzender der Chaos-Gruppe, Verein zur Förderung der Erforschung nichtlinearer Dynamik e.V.
seit 1991	Veranstaltung von Fortbildungsseminaren bei der Siemens AG
seit 1.5.92	wiss. Mitarbeiter am Lehrstuhl für Informatik der TUM
WS 1992/93	Lehrauftrag an der Fachhochschule München

Danksagung

Eine solche Arbeit kann man eigentlich nicht ohne Hilfe erstellen, sei es moralische, handwerkliche, geistige oder materielle Unterstützung. Und so möchte ich diesen Abschnitt nicht zu knapp halten, um möglichst keinen Retter in der Not zu vergessen und andererseits auch ein bißchen mehr als nur „Danke“ sagen zu können.

Der erste Mann, dem ich zu danken habe, ist Prof. Dr. ès sc. Edgar Lüscher, den dieser Dank leider nur noch posthum erreichen kann. Lüscher hat mir Gelegenheit gegeben, mich intensiver mit den Themen auseinanderzusetzen, die schon während meiner Diplomarbeit mein Interesse gefunden hatten, indem er mich in den Kreis seiner Mitarbeiter aufnahm. Dies bedeutete nicht nur ein gesichertes Minimaleinkommen, sondern auch eine Motivation, weil ich das Vertrauen, das er in mich gesetzt hat, nicht enttäuschen wollte. Und es bedeutete für mich Einblick in das weite Spektrum seiner Interessen, nicht beschränkt auf ein Molekül des Wissens, sondern Brücken schlagend zu Didaktik, Kunst und: Menschlichkeit.

Bei Prof. Lüscher hat auch Alfred Hübler promoviert, auf dessen Idee diese Arbeit zurückzuführen ist. Hübler stellte mit Lüscher zusammen den Kontakt zur MAN Technologie AG her und lieferte immer neue Ideen. Als Energiebündel und Wirbelwind konnte er auch die Arbeitsgrundlagen schaffen, die uns die Forschungsarbeit unter schwierigen Rahmenbedingungen (wie wohl immer) erleichterten, etwa die Zusammenarbeit mit dem SFB 266, um nur ein kleines Beispiel zu nennen. Seitdem er nach USA ausgeflogen ist, bietet er uns[1] Möglichkeiten, „drüben“ zu forschen, wann immer wir wollen. Aber Hübler wurde auch von Lüscher geprägt, und das ist einerseits eine der großen Leistungen Lüschers; andererseits gibt es mir die Gewißheit, ein — wenn auch kleines — Stück „Lüscher“ in mir zu tragen.

An der Seite Lüschers stand/steht seine Sekretärin, Frau Marianne Gerl. Es gibt selten Menschen, die einem nur Gutes zuteil werden lassen; aber sie hat mir jedenfalls nie Kummer bereitet, dafür jedoch jede Menge vom Hals gehalten, vertrauensvoll und zuverlässig. Falls ich einmal im Leben Karriere machen sollte, dann wünsche ich mir — mehr als viel Geld — eine solche Sekretärin.

Die Chaos-Gruppe hat ja nicht in Garching zu wirken begonnen, wie sich das für

---

[1] den Wissenschaftlern der Chaos-Gruppe

die Münchner TU-Physiker gehören soll, sondern in einem Keller der TU in der Innenstadt. Dort wurden wir von Herrn Dr. Otto Wohofsky unterstützt, der uns Geräte seiner Sammlung zur Verfügung stellte, und es brummig ertragen mußte, wenn eines davon wieder mal unauffindbar war, wie das im Chaos eben ab und zu vorkommt. Ohne Menschen wie ihn ist die Existenz einer Gruppe wie der Chaos-Gruppe undenkbar.

Spätestens jetzt möchte ich den Herren Professoren Dr. Erich Sackmann, Dr. Leo van Hemmen, Dr. Till v. Egidy und Dr. H. Kinder danken dafür, daß sie Retter in der Not waren, die durch den Tod Lüschers entstand und durch die die Doktoranden der Chaos-Gruppe ohne Professor dastanden.

Eine Gruppe an einem Institut ohne Professor braucht auch Geld. Vor allem für Werkstudenten, wenn Diplomanden nicht mehr zu kriegen sind. Wenn die Institutsmittel nicht mehr ausreichten, konnte ich auf Geld von MAN zurückgreifen, für das ich mich ganz herzlich bei den Herren Doctores A. Hayd und P. Meinke bedanken möchte. Darüber hinaus hat sich ein reger Gedankenaustausch entwickelt, der — wie ich hoffe — für beide Seiten fruchtbar bleibt.

Für die kritische Durchsicht der Arbeit möchte ich mich bedanken bei Dr. W. Baur, H. C. Schulz, und M. Eberhard und besonders bei V. Thurner, die mir gerade in der Schlußphase eine enorm vielseitige Hilfe war. Die professionellen Zeichnungen stammen von H. Schmitt.

Diese Arbeit verzehrte große Mengen an Rechenzeit, die mir insbesondere von Herrn Dr. P. Sarreither am Leibniz-Rechenzentrum, von Prof. A. Hübler am CCSR und von B. Schneck an den Garchinger CIP-Rechnern zur Verfügung gestellt wurde.

Schließlich ist es mir eine besondere Freude, allen Mitgliedern der Chaos-Gruppe zu danken, den vereinsmäßig organisierten, aber auch den freien, die in ihrer Eigenschaft als Werkstudenten, Diplomanden oder unentgeltlich mitarbeitende Interessenten viele Ideen beisteuerten, aber auch viel harte Programmier- oder Experimentierarbeit übernahmen und einen dadurch motivierten, weil sie mir das Gefühl gaben, Mitstreiter zu haben. Die wichtigsten noch nicht genannten:

K. Birken, H. Bremer, R. Fischer, G. Geiger, R. Georgii, M. Hagen, S. Heining, S. Hilgenfeldt, T. Kautzky, J. Kitzbichler, U. Köster, S. Krempl, M. Kuchler, P. Loibl, G. Mayer-Kress, B. Merté, J. Merten, M. Münker, P. Pöschl, B. Rückerl, R. Rückerl, T. Schlosser, A. Schmöller, M. Schwartzkopff, C. Thinschmidt, R. Wackerbauer, A. Wandelt, M. Weber, B. Wohlmuth, S. Zaunseder, H. Zielke.

Last not least möchte ich meinem Vater danken. Ohne das finanzielle und moralische Rückgrat, das er mir geschaffen hat, wäre diese Arbeit nie fertig geworden.

Anhang D

Stichwortverzeichnis

Liste verwendeter Symbole

a_j, b_j	untere und obere Grenzen des physikalisch relevanten Gebiets
α	Asynchronität
c	linearer Potentialparameter beim Helmholtz-Oszillator
$c_{\vec{i}}$	Koeffizient der Polynomdarstellung der stroboskopischen Abbildung
d_p	Konstante, die eine Poincaré-Ebene definiert
δ	Kronecker-Symbol oder δ-Funktion
Δ	Laplace-Operator oder mittlere Abweichung
ϵ	Parameter des van der Pol-Systems
$\vec{\varepsilon}$	Abweichung der Ist- von der Solldynamik
$\vec{f}$	diskrete Abbildung als Modell der Dynamik
$\vec{F}$	Flußvektorfeld der Differentialgleichung
$\vec{F}_c$	Steuerkraft für ein kontinuierliches System
$\vec{g}$	diskrete Abbildung als Modell der Solldynamik
$\vec{G}$	Flußvektorfeld mit Kontrollparametern als Zustandsvariablen
γ	Dämpfungsparameter
h	Schrittweite beim Eulerverfahren
I_i	Intervall für die i-te Variable
$\vec{i}$	Indexvektor
$\vec{K}$	Steuerkraft
K	Antriebsamplitude beim Helmholtz-Oszillator
$\ell(\hat{P}(\vec{x}))$	Minorante eines Polynoms
L	Likelihood-Funktion
$L\,(P(\vec{x}))$	Untergrenze eines Polynoms im Einheitsintervall
m	Dimension des Differentialgleichungssystems
m'	Dimension der Abbildung
m_p	Exponent zur Verschärfung des Maximums
m_w	Exponent für die Gewichtsfunktion
μ	Dämpfungsparameter bzw. Kontrollparameter beim Rössler-System
n	Zahl der Kontrollparameter
N	Zahl der Meßwerte
N_e	Zahl der Schritte des Eulerverfahrens

N_k	Zahl der Stützpunkte
ω	Kreisfrequenz des Antriebs
$P(\vec{\xi})$	Poincaré-Abbildung
$P(\vec{x}), P_0(\vec{x}), \hat{P}(\vec{x}), P^*(\vec{x})$	Polynome in $\vec{x}$
$\vec{p}$	Vektor der Kontrollparameter
φ	Winkel in der (x_1, x_2)-Ebene des Zustandsraums
$\dot{\varphi}$	Winkelgeschwindigkeit einer Trajektorie in der (x_1, x_2)-Ebene
$\dot{\varphi}_H$	Winkelgeschwindigkeit der Trajektorien des harmonischen, gedämpften Oszillators
$\dot{\varphi}_S$	Soll-Winkelgeschwindigkeit der Trajektorie
ϕ	Phasenverschiebung des Antriebs
$\vec{q}$	Parametervektor zur Charakterisierung des Rauschens
Q	Qualitätsfunktion
$\vec{\hat{R}}$	Rauschfunktion
R_K	Radius des Krümmungskreises
ρ	Radius bei Polarkoordinaten
r	Zahl der Iterationen der Modellabbildung
$\vec{r}$	Grade eines Polynoms in mehreren Variablen
$\vec{S}$	stroboskopische Abbildung
σ	skalare Funktion
$\vec{\sigma}$	Standardabweichungen der Zustandsvariablen
t	Zeit, unabhängige Variable
t'	normalzeittransformierte unabhängige Variable
t_0	Anfangszeit
T	Zeitintervall der diskreten Abbildung
$\hat{T}$	Periode des Antriebs
T'	Zeitintervall des normalzeittransformierten Systems
θ	Trägheitsmoment
Θ	Übergangswahrscheinlichkeit oder Heaviside-Funktion
(u, v)	Element einer Next-Extrema-Relation
$U\left(P(\vec{x})\right)$	Obergrenze eines Polynoms im Einheitsintervall
$u(\hat{P}(\vec{\hat{x}}))$	Majorante eines Polynoms
Δx_0	Genauigkeit der Bestimmung der Anfangsbedingungen
(ξ_K, η_K)	Koordinaten des Krümmungskreises
$\vec{\xi}$	Vektor der Anfangsbedingungen $\vec{x}(t = 0)$
$\vec{\eta}$	Vektor der reskalierten Anfangsbedingungen
$\mathcal{X}$	physikalisch relevantes Gebiet von Anfangsbedingungen
x, y, z	Zustandsvariablen (z.B. Auslenkungen)
$\vec{u}, \vec{x}, \vec{y}$	Zustandsvektoren
$\hat{x}$	Variable, reskaliert auf das Einheitsintervall
$z_{jk}(t_i)$	Zustand der Zelle (j, k) eines zellulären Automaten im i-ten Zeitschritt

Literaturverzeichnis

[BBA90] P. Bryant, R. Brown, and H.D.I. Abarbanel. Lyapunov Exponents from Observed Time Series. *Phys.Rev.Lett.* **65**(13), September 1990.

[BCT90] P. Bak, K. Chen, and C. Tang. A forest-fire model and some thoughts an turbulence. *Phys.Lett.A* **147**, 297, 1990.

[BD79] A. Bjoerck and G. Dahlquist. *Numerische Methoden.* Oldenburg Verlag, München, 2. Auflage, 1979.

[BDH90] Joseph L. Breeden, Friedrich Dinkelacker, and Alfred Hübler. Noise in the Modeling and Control of Dynamical Systems. *Physical Review A* **42**(10), 1990.

[BE91] M. Braune and H. Engel. Simulation of Autowave Propagation and Spiral Drift in Heterogeneous Excitable Media with Cellular Automata. Arbeitsbericht, Institut für physikalische Chemie, Berlin, Mai 1991.

[Bes84] D. Bestle. Analyse nichtlinearer dynamischer Systeme mit qualitativen und quantitativen Methoden. Diplomarbeit, Institut B für Mechanik der Universität Stuttgart, 1984.

[BH90] Joseph L. Breeden and Alfred Hübler. Reconstructing Equations of Motion from Experimental Data with Unobserved Variables. *Phys. Rev. A* **42**, 5817–5826, November 1990.

[BPV84] Pierre Bergé, Yves Pomeau, and Christian Vidal. *Order within Chaos.* John Wiley & Sons and Hermann, New York and Paris, 1984.

[BS89] I.N. Bronstein and K.A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik.* Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main, 24. Auflage, 1989.

[BSN85] A. Babloyantz, J.M. Salazar, and C. Nicolis. Evidence of Chaotic Dynamics of Brain Activity During the Sleep Cycle. *Phys. Lett.* **111A**, 152–156, 1985.

[Bun87] H. Bunz. *Zur Dynamik nichtlinearer angetriebener Oszillatoren.* Dissertation, Institut für theoretische Physik und Synergetik an der Universität Stuttgart, 1987.

[CE80] P. Collet and J.P. Eckmann. *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems.* Birkhäuser, Boston, 1980.

[CFPS86] J.P. Crutchfield, J.D. Farmer, N.H. Packard, and R.S. Shaw. Chaos. *Scientific American* **255**, 38–49, 1986.

[CH87] J. Cremers and A. Hübler. Construction of Differential Equations from Experimental Data. *Z. Naturforsch* **42a**, 1987.

[CHP89] Kenneth Chang, Alfred Hübler, and Norman Packard. Universal Properties of the Resonance Curve of Complex Systems. Technical Report CCSR-89-5, Center of Complex Systems Research, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1989.

[CKHJ90] K. Chang, A. Kodogeorgiou, A. Hübler, and E.A. Jackson. General Resonance Spectroscopy. Technical Report CCSR-90-19, Center of Complex Systems Research, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1990.

[CM87] J.P. Crutchfield and B.S. McNamara. Equations of Motion from a Data Series. *Complex Systems* **1**, 417, 1987.

[Coo80] N.K. Cooperrider. *Nonlinear Behaviour in Rail Vehicle Dynamics*, S. 173–194. S.I.A.M. Publications, Philadelphia, 1980.

[Dow75] E.H. Dowell. *Aeroelasticity of Plates and Shells.* Noordhoff International Publishing, Leyden, 1975.

[Duf18] G. Duffing. *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung.* Vieweg, 1918.

[Dyk82] Milton Van Dyke (Hrsg.). *An Album of Fluid Motion.* The Parabolic Press, Stanford, California, 1982.

[Ebe89] Werner Eberl. Vroni sucht das absolute Maximum. *Chaotische Nachrichten* Nr. 3, 1989.

[EHML87] W. Eberl, A. Hübler, M. Maurer, and E. Lüscher. Quasi-numerisches Näherungsverfahren zur Umwandlung von gewöhnlichen Differentialgleichungen in Differenzengleichungen. *Helv. Phys. Acta* **60**, 1987.

[EKH$^+$87] W. Eberl, M. Kuchler, A. Hübler, E. Lüscher, M. Maurer, and P. Meinke. Analytical Representation of Stroboscopic Maps of Ordinary Nonlinear Differential Equations. *Z.Phys.B* **68**, 253–258, May 1987.

[EMK83] G. Eilenberger and H. Müller-Krumbhaar (Hrsg.). *Ferienkurs '83: Nichtlineare Dynamik in kondensierter Materie*, Jülich, 1983. KFA Jülich GmbH.

[ER85] J.P. Eckmann and D. Ruelle. Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors. *Rev. Mod. Phys.* **57**, 617–56, 1985. Addendum 57, 1115.

[ESGH92] W. Eberl, R. Shermer, R. Georgii, and A. Hübler. Controlling Chaos without Feedback. *to be published* , 1992.

[ESH92] W. Eberl, H.C. Schulz, and S. Hilgenfeldt (Hrsg.). *Das Chaos-Lexikon.* Kunst & Alltag, München, 1992. Preprint.

[Far82] J.D. Farmer. Information Dimension and the Probabilistic Structure of Chaos. *Z. Naturforsch.* **37a**, 1304, 1982.

[Fei83] M.J. Feigenbaum. Universal Behavior in Nonlinear Systems. *Physica* **7D**, 16–39, 1983.

[FS87] J.D. Farmer and J.J Sidorowich. Predicting Chaotic Time Series. *Phys.Rev.Lett.* **59**, 845–848, 1987.

[FTW83] Doyne Farmer, Tommasso Toffoli, and Steven Wolfram (Hrsg.). *Cellular Automata*, Amsterdam, Oxford, New York, Tokyo, März 1983. North-Holland Physics Publishing.

[GEHL89] R. Georgii, W. Eberl, A. Hübler, and E. Lüscher. Resonant Stimulation and Control of Nonlinear Mechanical Pendulum by Poincaré Maps. *Helv. Phys. Acta* **62**, 290–293, 1989.

[Geo89] Robert Georgii. Nichtlineare Resonanzen. Diplomarbeit, Physik-Department E13 der TU München, 1989.

[GH83] John Guckenheimer and Philip Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields.* Applied Mathematical Sciences, Vol. 42. Springer, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1983.

[Gle88] James Gleick. *Chaos – die Ordnung des Universums.* Droemer Knaur, München, 1988. engl. Original: Chaos – Making a New Science.

[Hak83] H. Haken. *Synergetik–Eine Einführung.* Springer, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1983.

[Hel70] H Helmholtz. *Die Lehre von den Tonempfindungen.* Vieweg, 1870.

[HL89] A. Hübler and E. Lüscher. Resonant Stimulation and Control of Nonlinear Oscillators. *Naturwissenschaften* **76**, 67–69, 1989.

[HL90] B.A. Huberman and E. Lumer. Dynamics of Adaptive Systems. *IEEE Trans. Circuits Syst.* **37**(4), April 1990.

[Hol87] Arun v. Holden (Hrsg.). *Chaos*. Manchester University Press, Manchester, 1986, paperback 1987.

[HU90] John E. Hopcroft and Jeffrey D. Ullman. *Einführung in die Automatentheorie, Formale Sprachen und Komplexitätstheorie*. Addison-Wesley, 1990. Übersetzung der englischen Ausgabe von 1979: Introduction to Automata Theory, Languages and Computation.

[Hüb87] Alfred Wilhelm Hübler. *Beschreibung und Steuerung nichtlinearer Systeme*. Dissertation, Physik-Department E13 der TU München, 1987.

[Hüb89] A. Hübler. Adaptive Control of Chaotic Systems. *Helv. Phys. Acta* **62**, 1989.

[Hüb92] Alfred Hübler. Modeling and Control of Complex Systems: Paradigms and Applications. In L. Lam (Hrsg.), *Modeling Complex Phenomena*, New York, 1992. Springer Verlag.

[IB84] T.E. Ingerson and R.L. Buvel. Structure in Asynchronous Cellular Automata. *Physica* **10D**, 59–68, 1984.

[IMS84] International Mathematical & Statistical Libraries, Inc., 1984. Version 9.

[Jac88] A.E. Jackson. *Perspectives in Nonlinear Dynamics*, Band 1. Cambridge University Press, 1988.

[JH90] A.E. Jackson and A. Hübler. Periodic Entrainment of Chaotic Logistic Map Dynamics. *Physica* **44D**, 407–420, 1990.

[Kan89] K. Kaneko. Spatiotemporal Chaos in One- and Two-Dimensional Coupled Map Lattices. *Physica* **37D**, 60–82, 1989.

[Kan90] K. Kaneko. Simulating Physics with Coupled Map Lattices – Pattern Dynamics, Information Flow and Thermodynamics of Spatiotemporal Chaos. In K. Kawasaki, A. Onuki, and M. Suzuki (Hrsg.), *Formation, Dynamics and Statistics of Patterns*, S. 1–52. World Scientific, 1990.

[Kar86] Richard M. Karp. Combinatorics, Complexity and Randomness. *Communications of the ACM* **29**, 98, 1986.

[Kau87] Thomas Kautzky. Die Konstruktion von Differentialgleichungen aus experimentellen Datensätzen. Diplomarbeit, Physik-Department E13 der TU München, München, 1987.

[Kau92] Thomas Kautzky. *Modellierung der Dynamik komplexer nichtlinearer Systeme.* Dissertation, Physik-Department E13 der TU München, 1992.

[KEHL88] M. Kuchler, W. Eberl, A. Hübler, and E. Lüscher. The Description of Complex Dynamical Systems by Simple Maps. *Helv. Phys. Acta* **61**, 232–235, 1988.

[KEHL92] M. Kuchler, W. Eberl, A Hübler, and E. Lüscher. The Calculation of Simple Maps of Complex Dynamical Systems. 1992.

[KH91] S. Krempl and A. Hübler. Introduction to Optimal Control Theory of Classical and Quantum Systems. Technical Report, Center of Complex Systems Research, University of Illinois at Urbana-Champaign, März 1991.

[KMIL84] T. Klinker, W. Meyer-Ilse, and W. Lauterborn. Period Doubling and Chaotic Behaviour in a Driven Toda Oscillator. *Phys. Lett. A* Seite 371, 1984.

[Kun91] A. Kunert. Private Mitteilung, 1991.

[Lie91] Wolfgang Liebert. *Chaos und Herzdynamik*, Band 4 von *Reihe Physik.* Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1991.

[Lin81] Paul S. Linsay. Period Doubling and Chaotic Behavior in a Driven Anharmonic Oscillator. *Phys.Rev.Lett.* **47**, 1349–1352, 1981.

[LKP87] R.W. Leven, B.-P. Koch, and B. Pompe. *Chaos in dissipativen Systemen.* Vieweg, 1987.

[LL69] Landau and Lifshitz. *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Band 1, Mechanik. Akademie-Verlag, Berlin, 6. Auflage, 1969.

[LL83] A.J. Lichtenberg and M.A. Lieberman. *Regular and Stochastic Motion*, Band 38 von *Applied Mathematical Sciences.* Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 1983.

[Lor63] E.N. Lorenz. Deterministic Nonperiodic Flow. *J.Atmos.Sci.* **20**, 130, 1963.

[LP88] W. Lauterborn and U. Parlitz. Methods of Chaos Physics and their Application to Acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.* **84**(6), 1988.

[LY75] T.Y. Li and J.A. Yorke. Period Three Implies Chaos. *Am. Math. Month.* **82**, 985–992, 1975.

[MH90] M. Markus and B. Hess. Isotropic Automata for Simulations of Excitable Media: Perodicity, Chaos and Reorganization. In D. Meinköhn (Hrsg.), *Dissipative Structures in Transport Processes and Combustion.* Springer, 1990.

[Möl90] Peter Möller. A Synergetic Model for Simulating the Activity of a Single Neuron. Vortrag im Serneus-Seminar, 8. Februar 1990.

[Moo87] Francis C. Moon. *Chaotic Vibrations.* John Wiley & Sons, 1987.

[MRP89] Thomas P. Meyer, Fred C. Richards, and Norman H. Packard. Learning Algorithm for Modeling Complex Spatial Dynamics. *Phys.Rev.Lett.* **63**, 1735–1738, October 1989.

[MWEE86] P. Möller, K. Wetzl, M. Eiswirth, and G. Ertl. Kinetic Oscillations in the Catalytic CO Oxidation on Pt(100): Computer Simulations. *J. Chem. Phys.* **85**(9), 1986.

[ND70] M. Novak and A.G. Davenport. Aeroelastcic Instability of Prisms in Turbulent Flow. In *Proc. ASCE J. Eng. Mech. Div. EMI*, Band 96, S. 17–39, 1970.

[NM79] A.H. Nayfeh and D.T. Mook. *Nonlinear Oscillations.* John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, 1979.

[OGY90] Edward Ott, Celso Grebogi, and James A. Yorke. Controlling Chaos. Technical Report, University of Maryland, College Park, MD, USA, 1989/90.

[OHW90] Frank Ohle, Alfred Hübler, and Michael Welge. Adaptive Control of Chaotic Systems. Technical Report CCSR-90-13, Center of Complex Systems Research, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1990.

[Paw91] Klaus Pawelzik. *Nichtlineare Dynamik und Hirnaktivität*, Band 6 von *Reihe Physik.* Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1991.

[PDR88] A.P. Peirce, M.A. Dahleh, and H. Rabitz. Optimal Control of Quantum–Mechanical Systems: Existence, Numerical Approximation and Applications. *Phys. Rev. A* **37**, 4950–4964, 1988.

[PFTV86] William H. Press, Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky, and William T. Vetterling. *Numerical Recipes.* Cambridge University Press, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney, 1986.

[PH90] B. Plapp and A. Hübler. Nonlinear Resonances and Suppression of Chaos in the Rf-Biased Josephson Junction. *Phys.Rev.Lett.* **65**, 2302–2305, 1990.

[REHL88] B. Rückerl, W. Eberl, A. Hübler, and E. Lüscher. Control of the Dynamics of a Waterjet. *Helv. Phys. Acta* **61**, 80–83, 1988.

[REL89] B. Rückerl, W. Eberl, and E. Lüscher. Description of the Dynamics of Nonlinear Extended Systems by Iterative Maps. *Helv. Phys. Acta* **62**, 347–350, 1989.

[RH82] R.W. Rollins and E.R. Hunt. Exactly Solvable Model of a Physical System Exhibiting Universal Chaotic Behaviour. *Phys.Rev. A* **29**, 3327–3334, 1982.

[RHL87] G. Reiser, A. Hübler, and E. Lüscher. Algorithm for the Determination of the Resonances of Anharmonic Damped Oscillators. *Z. f. Naturforschung* **42a**, 803–807, 1987.

[RJ70] D.F. Rutland and G.J. Jameson. Droplet Production by the Disintegration of Rotating Liquid Jets. *Chem. Eng. Sci.* **25**, 1301–1317, 1970.

[RJ71] D.F. Rutland and G.J. Jameson. A Non-Linear Effect in the Capillary Instability of Liquid Jets. *J.Fluid Mech.* **46.2**, 267–271, 1971.

[Roa72] P.J. Roache. *Computational Fluid Dynamics.* Hermosa Publishers, 1972.

[Rös76] O.E. Rössler. An Equation for Continuous Chaos. *Phys.Lett.* **57A**, 397–8, 1976.

[Rüc89] Bernhard Rückerl. Beschreibung der Dynamik ausgedehnter nichtlinearer Systeme durch Iterationsabbildungen. Diplomarbeit, Physik-Department E13 der TU München, 1989.

[SB78] J. Stoer and R. Bulirsch. *Einführung in die numerische Mathematik*, Band 2. Springer, 1978.

[Sch89a] Christian Scholz. Grippe - durchaus eine runde Sache — A-synchron heißt nicht unzeitgemäß. *Chaotische Nachrichten* Nr. 1, August 1989.

[Sch89b] Heinz-Georg Schuster. *Deterministic Chaos.* VCH-Verlagsanstalt, Weinheim, 2. Auflage, 1989.

[Sch90a] Christian Scholz. Asynchrone Simulation von Systemen mit raumzeitlicher Dynamik und Anwendung auf Datentransportprobleme. Diplomarbeit, Physik-Department E13 der TU München, 1990.

[Sch90b] Hans-Christoph Schulz. Ein zellulärer Automat als Modell für die Entstehung fraktaler Strukturen bei Erosionsvorgängen. Diplomarbeit, Physik-Department E13 der TU München, 1990.

[SEB+90] Ch. Scholz, W. Eberl, K. Birken, S. Zaunseder, and E. Lüscher. The Influence of Asynchronous Control on the Geometry of Cellular Automaton Patterns. *Helv. Phys. Acta* **63**, 551–552, 1990.

[SH92] H.C. Schulz and S. Hilgenfeldt (Hrsg.). *25 Experimente zu Chaos und Strukturbildung.* Kunst & Alltag, München, 1992.

[SK89] W.-H. Steeb and A. Kunick. *Chaos in Dynamischen Systemen.* Bibliographisches Institut, Mannheim, 2. Auflage, 1989.

[SKL90] H.C. Schulz, T. Kautzky, and E. Lüscher. A Model for the Pattern Formation due to Erosion. *Helv. Phys. Acta* **63**, 535–537, 1990.

[SRR90] S. Sinha, R. Ramaswamy, and J.S. Rao. Adaptive Control in Nonlinear Systems. *Physica* **43D**, 118–128, 1990.

[Ste91] Willi-Hans Steeb. *A Handbook of Terms Used in Chaos and Quantum Chaos*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1991.

[Swi83] H.L. Swinney. Observations of Order and Chaos in Nonlinear Systems. *Physica* **7D**, 3–15, 1983.

[TEH+90] V. Thurner, W. Eberl, A. Hübler, N. Packard, and E. Lüscher. Determination of the Absolute Maximum of Polynomials by Algebraic Bisection. *Helv. Phys. Acta* **63**, 549–550, 1990.

[TEH91] V. Thurner, W. Eberl, and A. Hübler. Determination of the Absolute Maximum of Polynomials by Algebraic Bisection Method. Technical Report, Center of Complex Systems Research, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1991.

[TH88] Pablo Tamayo and Hyman Hartman. Cellular Automata, Reaction-Diffusion Systems and the Origin of Life. In C. Langton (Hrsg.), *Artificial Life*, SFI Studies in the Sciences of Complexity, S. 105–124. Addison-Wesley, 1988.

[TM87] T. Toffoli and N. Margolus. *Cellular Automata Machine*. MIT Press, 1987.

[TPJ82] J. Testa, J. Pérez, and C. Jeffries. Evidence for Universal Chaotic Behavior of a Driven Nonlinear Oscillator. *Phys.Rev.Lett.* **48**, 714–717, 1982.

[URP74] A. Uppal, W.H. Ray, and A. Poore. On the Dynamic Behaviour of Continous Stirred Tank Reactors. *Chem. Eng. Sci.* **29**, 967–985, 1974.

[Wan89] Andreas Wandelt. Anwendung von Normalzeittransformationen zur analytischen Berechnung von Poincaré-Abbildungen. Diplomarbeit, Physik-Department E13 der TU München, 1989.

[WEHL88] R. Wackerbauer, W. Eberl, A. Hübler, and E. Lüscher. Analytical Representation of Stroboscopic Maps of Ordinary Nonlinear Differential Equations. *Helv. Phys. Acta* **61**, 236–239, 1988.

[WEHL89] A. Wandelt, W. Eberl, A. Hübler, and E. Lüscher. Transformation to Normal Time for the Calculation of Poincaré Maps in Closed Form. *Helv. Phys. Acta* **62**, 339–342, 1989.

[WHMK92] Renate Wackerbauer, Alfred Hübler, and Gottfried Mayer-Kress. Algebraic Calculation of Stroboscopic Maps of Ordinary, Nonlinear Differential Equations. *to appear in Physica D* , 1992.

[Win74] A.T. Winfree. Rotating Chemical Reactions. *Sci.Am.* **230**, 82–95, June 1974.

[WKHL91] R. Wittmann, T. Kautzky, A. Hübler, and E. Lüscher. A simple Experiment for the Examination of Dendritic River Systems. *Naturwissenschaften* **78**, 23–25, 1991.

[Wol86] Stephen Wolfram. *Theory and Applications of Cellular Automata.* World Scientific, 1986.

[Wor92] R. Worg. *Nichtlineare Dynamik: Didaktische Studien zu einem neuen Teilbereich der Physik.* Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität, München, 1991/92.

[WSHL88] C. Wagner, W. Stelzel, A. Hübler, and E. Lüscher. Resonante Steuerung nichtlinearer Schwinger. *Helv. Phys. Acta* **61**, 228–231, 1988.

[Zen92] Ch. Zenger. private Mitteilung, Januar 1992.